序　　言

这部书的第一卷终于交印了，它既是急就章，又是拖沓篇. 1958 年匆匆上马，现想现写现印现讲，有时写稿不过三遍，仅仅经过起草、修改、誊正三道手续便拿去付印. 有时候校对来不及，就不校对了，因而原讲义上错误百出，疵谬迭见，所以说这是急就章. 如果能专心一志地连续地干下去，那还可能比较好些，但又经常为其它工作所打断，因而写一段停一停，改一章放一放的情况又经常出现，所以说是拖沓篇. 紧紧松松，赶赶拖拖. 因而详略不一，前后不贯，轻重失调，呼应不周等毛病在所难免的了.

情况是如此，虽然经过同志们的帮助和修改重写，但还可能留下不少后遗症. 这样的草率工作本来不该交印的，但不少同志热情鼓励，几经踌躇终于把它出版了，希望经过读者的帮助，人多、眼多、想法多，多提意见将来可以改写得更好些.

这个课自始至终是和王元同志合开的，他对原稿的形成与改写都提了不少意见，并且有不少章节都是出诸他的手笔. 在共同教学中一些心得已经吸收入我们合著的“积分的近似计算”一书中（科学出版社 1961 年初版），1961 年龚升、吴方等同志又用这讲义教了一遍，修改了不少. 最后定稿又经过曾肯成、许以超、史济怀、邓诗涛、李炯生、刘碧梧等同志的细心校阅，提了不少意见. 个别章节还获得了戴元本、陆汝钤、韩京清、周永佩、罗祥钰、曹传书、吴松林、江嘉禾、李培信、邵秀民、陈志华、石赫、殷慰萍等同志的帮助，有关这些我在这儿表示谢意. 特别应该一提的是：在最后定稿的时候，获得了中山大学吴兹潜、林伟二同志的帮助，他们一字不苟地校阅推敲，使本书避免不少错误. 这样的主动地来自其他院校的帮助只能归功于集体主义的优越性.

在写作的过程中参考过熊庆来的“高等算学分析”（1934）；苏步青的“微分几何学”（1947）；赵访熊的“高等微积分”（1949）；孙光远、孙叔平的“微积分学”（1952）；陈建功的“实函数论”（1958）；杨宗磐的“数学分析入门”（1958）；樊映川等的“高等数学讲义”（1958）；陈莀民的“高等数学教程”（1958）；关肇直的“高等数学教程（第一卷）”（1959）；江泽坚的“数学分析”（1960）；北京大学、复旦大学、南京大学及高等数学教科书编审委员会的“高等数学教程”，我在此致谢. 其他作为参考的外文书籍不在此一一列举了.

在写作的过程中，曾经有过一些努力，企图能更好地体现党对教学改革的方针，但是由于自己的理论和业务水平，没有能够较好地做到，读者可能发现一些其它书上所没有的材料，也可能发现一些稍有不同的处理方法，但毕竟是太少了．在谈到这一点的时候，感到空虚，并且诚恐会错误百出．大家所公认的、辗转传抄的已经成熟的材料，错误还有时难免，何况第一次写下来的东西，那更使人耽心了，但是还是斗胆地放进书里去，作为引玉之砖，作为试矢之的．特别是一些高的内容放低了，难的内容改易了，繁的内容化简了的部分更希望大家指正．但是我个人深信，只要每本书都有些章节改进，集腋成裘，我们教学改革会汇成巨流的，辛勤的点滴劳动，可能是大丰收的预兆．

大学教书不是照本讲，因此本书也准备了一些可教可不教的材料，教师们可以灵活掌握，余下的材料可以作为学有余力的同学的课外读物．习题应当做，并且适当地要多做些．本书没有组织好习题，希望老师们自已设法组织．习题的目的首先是熟练和巩固学习了的东西；其二是初步启发大家会灵活运用，独立思考；其三是融会贯通，出些综合性的习题把不同部门的数学沟通起来．

在教学过程中深得教学相长的益处，其中不少是由于同学所提意见的影响，我把所得到的一些不成熟的看法写在下面供同志们参考．我讲书喜欢埋些伏笔，把有些重要概念、重要方法尽可能早地在具体问题中提出，并且不止一次地提出．目的在于将来进一步学习的时候会较易接受高深的方法，很可能某些高深方法就是早已有之的朴素简单的方法的抽象加工而已．（有些深化了些，有些并没有深化而仅仅是另一形式而已．）我也喜欢生书熟讲，熟书生温的方法，似乎是在温熟书，但把新东西讲进去了，这是因为一般讲来，生书比旧课，真正原则性的添加并不太多的原故．找另一条线索把旧东西重新贯穿起来，这样的温习方法容易发现我们究竟有哪些主要环节没有懂透．有时分讲合温，或合讲分温，先把一个机器的零件一一搞清，再看全局，或先看全部机器的作用和目的，再分析要造成这个机器需要哪些零件而把条件一一讲明．“数”与“形”的“分”和“合”，“抽象”与“具体”的“分”与“合”都是在反复又反复的过程中不断提高的．同学也要求讲讲“人家怎样想出来的”，因而在讲书时也曾作过尝试，主观地推测一下，这很可能并不是原来的想法，但给出一条“这一步看下步并不难，连看几步就达到目的”的途径，作为同学们的参考．

以上一些肤浅的看法在讲课时都尝试过，但绝大部分写不下来，或者写下来就走了样，因此，同是一部书，可以多样讲，讲义作参考，结合同学的实际情况能灵活掌握才好．拉杂地写了这些意见，与其说是对教师讲的，还不如说是对同学（或自学的人）讲的．

总之，由于水平的限制，虽然黾勉从事，但缺点一定不少，我诚挚地希望读者们多提意见，更希望教师们多多指教.

最后，特别需要提起的是：由于中国科学院数学研究所党组织的支持，才使我有机会讲授基础课和编写讲义；在编写过程中，自始至终得到了中国共产党中国科学技术大学委员会的鼓励、关怀与支持，还给予了具体的帮助，这是我衷心感激的．有了党的鼓励、关怀与支持，使我这几年来敢于按照自己的一些肤浅的设想来进行教学的尝试，使我这几年来有勇气把第一次写下来的东西放到课堂上去教，使我这几年来能把这项工作坚持下来．至于中国科技大学教务处、数学系与数学教研室的同事们，在我从事这项工作的时候，一直给我方便与帮助，也在此表示感谢．对科学出版社的感谢，那就更应当在此一提了，他们花了大量的劳动，在制图、编辑加工、排版印刷、校对等方面都做了细致而深入的工作.

华　罗　庚

1962年6月11日

目　　录

第十一章　积分学的应用

§1. 曲綫的长度

弧长的定义. 假定 A, B 是給定的曲綫上的两点，以这两点为端点作这曲綫的內接折綫，当这折綫的边数无限增加，而且每边的长度都趋向于 0 时，这折綫的周界长趋向的极限（如果这极限存在的話）叫做这曲綫在 A, B 两点之間的弧长.

假定所給的曲綫的参变数表示是

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t). \tag{C}$$

当 $t=\alpha$ 及 β 时所給出的点就是 A 点与 B 点. 假定 $\alpha<\beta$，当 t 由 α 变到 β 时，(x,y) 就沿着曲綫 (C) 由点 A 变到点 B. 又假定 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都有連續的微商，在弧上取 $(n+1)$ 个点

$$A=M_0,\ M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_{\nu-1},\ M_\nu,\ \cdots,\ M_{n-1},\ M_n=B$$

各对应于

$$\alpha=t_0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{\nu-1},\ t_\nu,\ \cdots,\ t_{n-1},\ t_n=\beta.$$

把 M_ν 的坐标記作

$$x_\nu=\varphi(t_\nu),\quad y_\nu=\psi(t_\nu),$$

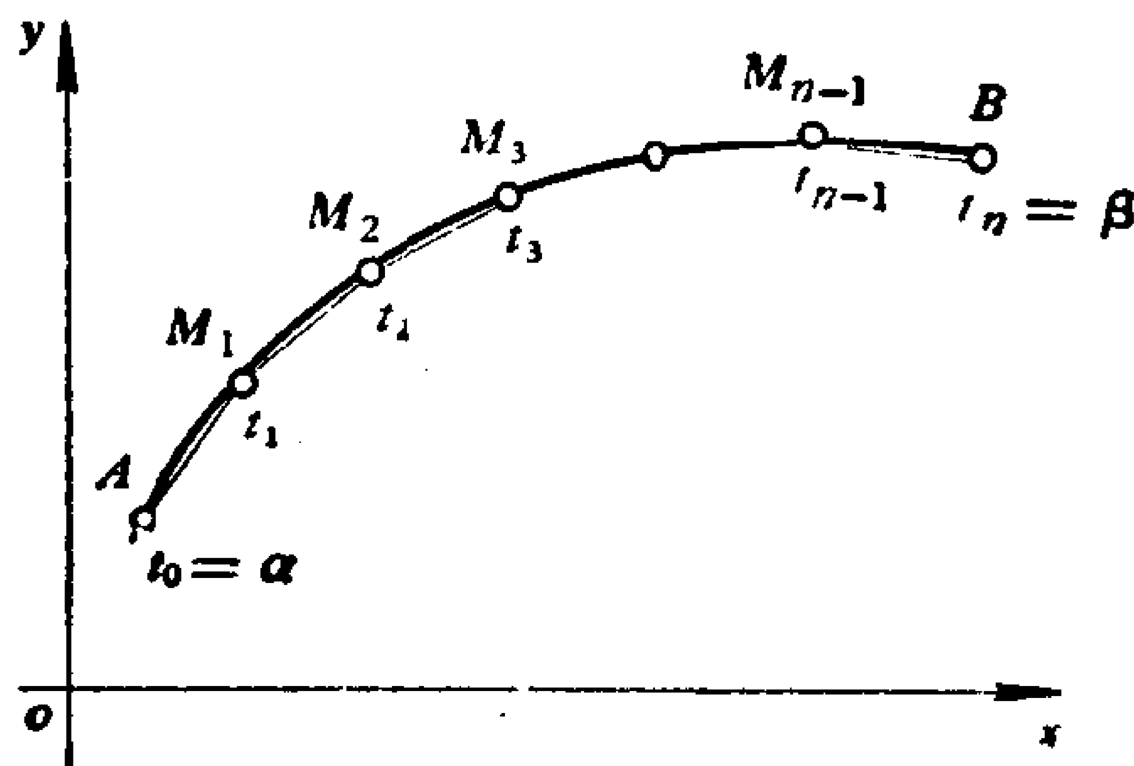


图　1

則 $M_{\nu-1}$ 与 M_ν 之間的距离等于

$$\sqrt{(x_\nu-x_{\nu-1})^2+(y_\nu-y_{\nu-1})^2}.$$

因此折綫的总长度等于

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{(x_\nu-x_{\nu-1})^2+(y_\nu-y_{\nu-1})^2}$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1})]^2+[\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1})]^2}.$$

依定义，A，B 間的弧长 s 等于

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{(\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1}))^2+(\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1}))^2}.$$

由 Lagrange 公式，我們有

$$\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1})=(t_\nu-t_{\nu-1})\varphi'(\tau'_\nu),$$
$$\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1})=(t_\nu-t_{\nu-1})\psi'(\tau''_\nu),$$

这儿 τ'_ν，τ''_ν 都是 $(t_{\nu-1},\ t_\nu)$ 之間的值．所以

$$\sqrt{(\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1}))^2+(\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1}))^2}$$
$$=(t_\nu-t_{\nu-1})\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau''_\nu)}.$$

命

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau''_\nu)}=\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau'_\nu)}+\eta_\nu,$$

则得

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\{\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau'_\nu)}+\eta_\nu\}(t_\nu-t_{\nu-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau'_\nu)}(t_\nu-t_{\nu-1})+\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(t_\nu-t_{\nu-1}).$$

前者等于

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

再証后者的极限等于 0．由不等式

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}\right|\leqslant|b-b_1|$$

(这不等式的証明是：

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}=\frac{b+b_1}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}(b-b_1))$$

可知

$$|\eta_\nu|<|\psi'(\tau''_\nu)-\psi'(\tau'_\nu)|.$$

根据 $\psi'(t)$ 的一致連續性，給了任意 $\varepsilon>0$，可找到一个 δ，使当 $|t''-t'|<\delta$ 时

$$|\psi'(t'')-\psi'(t')|<\varepsilon.$$

即当 $\max|t_\nu-t_{\nu-1}|<\delta$ 时，

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(t_\nu-t_{\nu-1})\right|<\varepsilon(\beta-\alpha).$$

因得所証．

A，B 两点間的弧长可由公式

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

表出来．

如果 t 是一变点，則

$$s(t)=\int_\alpha^t\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

对积分的上限求微商得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)},$$

再由

$$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt},\quad \psi'(t)=\frac{dy}{dt}$$

得出

$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,\quad ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

所以求弧长的公式可以写成为

$$s=\int_{(A)}^{(B)}ds=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

这里 (A), (B) 各表依照积分变量对应于曲綫上点 A，点 B，这积分所应当取的上下限.

特别是，如果曲綫由

$$y=f(x)$$

表示，并且 A, B 各对应于 $x=a$, $x=b$, 則弧长公式变为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

又如果是极坐标形式

$$r=f(\theta),$$

由直角坐标 x, y 与极坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

可得(这就可以看成为以 θ 为参变数的方程)

$$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta,$$

$$dy=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta,$$

及

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2\,d\theta^2,$$

所以

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(dr)^2+r^2(d\theta)^2}.$$

如果 A 与 B 各对应于角 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 的点，則极坐标所表出的弧长是

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

ds 的极坐标表达式也可以由图 2 得到. 当弧 MM' 非常小时，可以用 M, M' 間的弦代替这段弧. 这弦恰好是直角三角形 MNM' 的弦，而其他边各与 $rd\theta$, dr 近似相等.

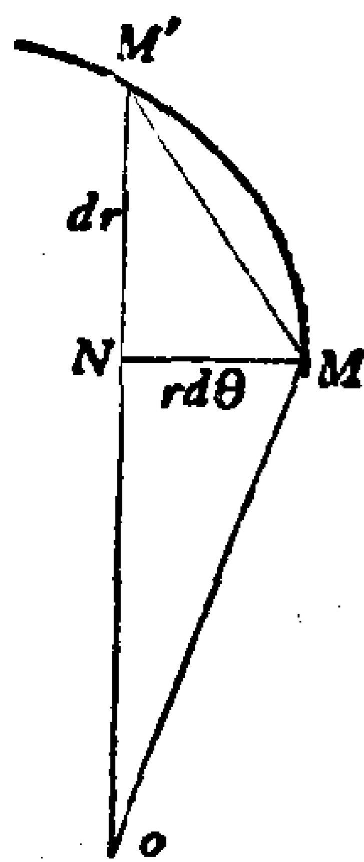


图 2

注意，曲綫的长度是有方向的，如果我們假定了正向是由 A 到 B，則由 B 到 A 的度量就是以上的长度加一負号，在用参变数表示法时，也請注意这点，要看准由 α 变到 β 是否就是 A 到 B 的方向.

例 1. 求 $(0,0)$ 与 (a,a^2) 之間抛物綫 $y=x^2$ 的弧长 s.

$$s = \int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^a \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2a}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}[2a\sqrt{1+4a^2}+\log(2a+\sqrt{1+4a^2})].$$

例 2. 求对数螺綫

$$r = Ce^{a\theta}\ (C>0)$$

在 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之間的弧长,这儿 C 为常数.

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = C\sqrt{1+a^2}\int_\alpha^\beta e^{a\theta}d\theta$$

$$= \frac{C\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\beta}-e^{a\alpha}).$$

例 3. 設有一个半径是 a 的圓在一条直綫上滚动,这圓上一个固定点 M 的軌迹称为旋輪綫,求 M 与直綫相交的两点之間的弧长.

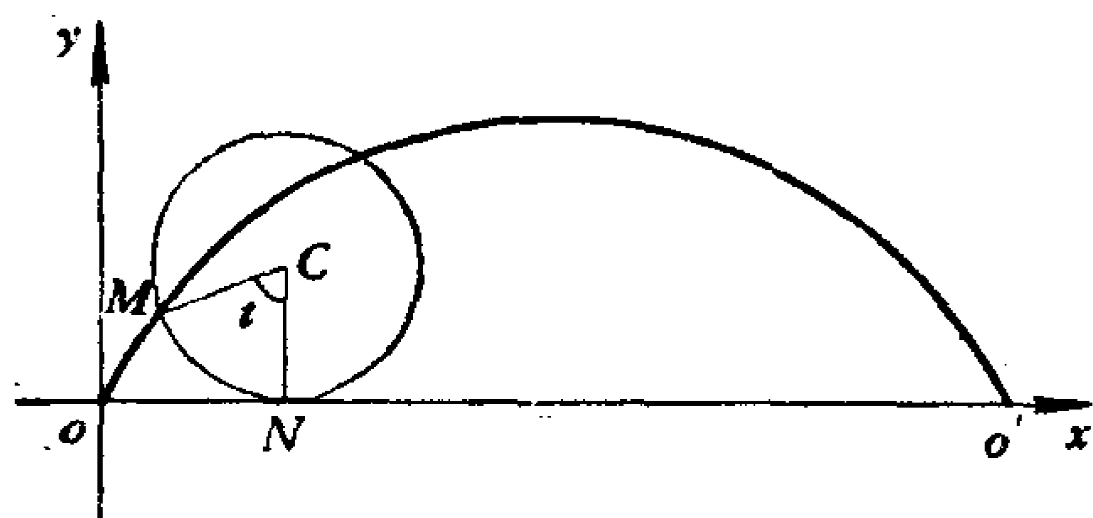


图 3

命固定直綫为 x 軸,M 与直綫两邻接的交点是 o 与 o',圓心是 C,$\angle MCN = t$,則可知旋輪綫有如下的参数表示:

$$x = a(t-\sin t),$$
$$y = a(1-\cos t),$$

故弧 $\overset{\frown}{oo'}$ 的长度为

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a.$$

習題 1. 求星形綫 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 的周长.

習題 2. 求圓的漸伸綫

$$x = a(t\sin t+\cos t),\quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

当 $t=0$ 至 $t=\theta$ 时的弧长.

習題 3. 求心脏綫 $r = a\cos\theta + a$ 的周长.

習題 4. 一条有重量的鏈子,两端悬起,鏈的方程可以写为

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}).$$

求当 $x=0$ 至 $x=b$ 之間的弧长.

§2. 面　积

我們已經証明过在曲綫

$$y = f(x)$$

与 x 軸，$x = a$，$x = b$ 之間的面积等于

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

我們現在研究参变数表示下的情况，仍假定

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

此处的 φ 与 ψ 有連續微商．如果当 t 由 t_0 变到 t_1 时，x 是增函数，則在此曲綫与 x 軸之間，及对应于 t_0, t_1 的縱坐标之間的面积等于

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt.$$

如果我們有一条閉的曲綫 C，它是一个单圈形式的曲綫，即任一平行于 x 軸或 y 軸的直綫至多和它交于两点．假定 C 上的点可以由参变数表示，并且当 t 由 t_0 变到 t_1，P 依一定方向走完一圈．我們假定 P 取这样的走向，使当 P 按这方向沿 C 运动时，由 C 所围成的面积的点总在 P 的左边．我們現在来研究这个曲綫 C 所包的面积．

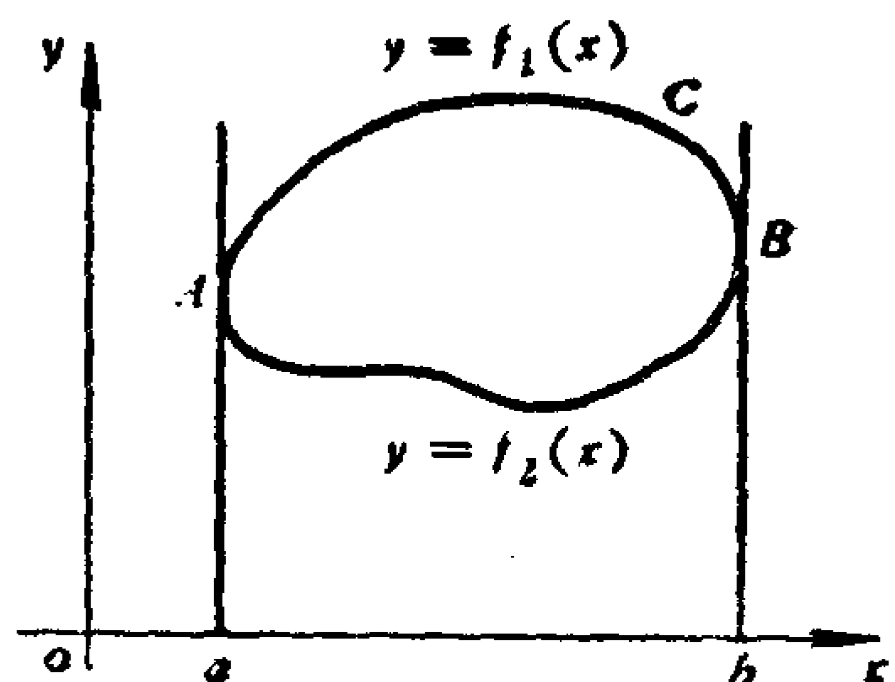


图　4

假定这曲綫在 $x = a$，$x = b$ 之間，且这两直綫与 C 有公共点，曲綫的上一部分的方程为 $y = f_1(x)$，下一部分为 $y = f_2(x)$.

不妨假定当 t 由 t_0 变为 t' 时，曲綫由 A 沿 $y = f_2(x)$ 到 B．由 t' 变为 t_1 时，曲綫由 B 沿 $y = f_1(x)$ 到 A．如此則得所求的面积是

$$\int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = -\int_{t'}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t'} \psi(t) \varphi'(t) dt = -\int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt.$$

同样可以証明，这面积也等于

$$\int_{t_0}^{t_1} x \frac{dy}{dt} dt$$

及

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

例 1.　求橢圓

$$x = a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1 + t^2}$$

所包的面积．

当 t 由 $-\infty$ 变至 ∞ 时，图綫走了一圈，故面积为

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=ab\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=ab\,\mathrm{tg}^{-1}t\Big|_{-\infty}^{\infty}=ab\pi.$$

卽椭圓面积等于长半軸和短半軸的乘积的 π 倍，特别当 $a=b$ 时，便得到圓的面积。

例 2. 求 $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$ 所包的面积。

$$\text{所求的面积}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\cdot 3b\sin^2 t\cos t+3a\cos^2 t\sin t\cdot b\sin^3 t]dt$$

$$=\frac{3}{2}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{16}ab\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi ab.$$

例 3. 求曲綫

$$x^3+y^3=3axy$$

的围綫部分的面积。

我們已知参变数表示法：

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

当 t 由 0 到 ∞ 时，沿这围綫走了一圈，所以

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{9a^2t^2dt}{(1+t^3)^2}=-\frac{3a^2}{2(1+t^3)}\Big|_0^{\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

于是面积等于 $\frac{3}{2}a^2$。

現在考虑极坐标的情况．由

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

及

$$dx=dr\cos\theta-r\sin\theta\,d\theta,\quad dy=dr\sin\theta+r\cos\theta\,d\theta$$

可知

$$\frac{1}{2}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}r^2d\theta.$$

因此面积公式的极坐标表示法是

$$\frac{1}{2}\int r^2d\theta.$$

如果要求角 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之間曲綫 $r=r(\theta)$ 所围成的扇形面积，就是

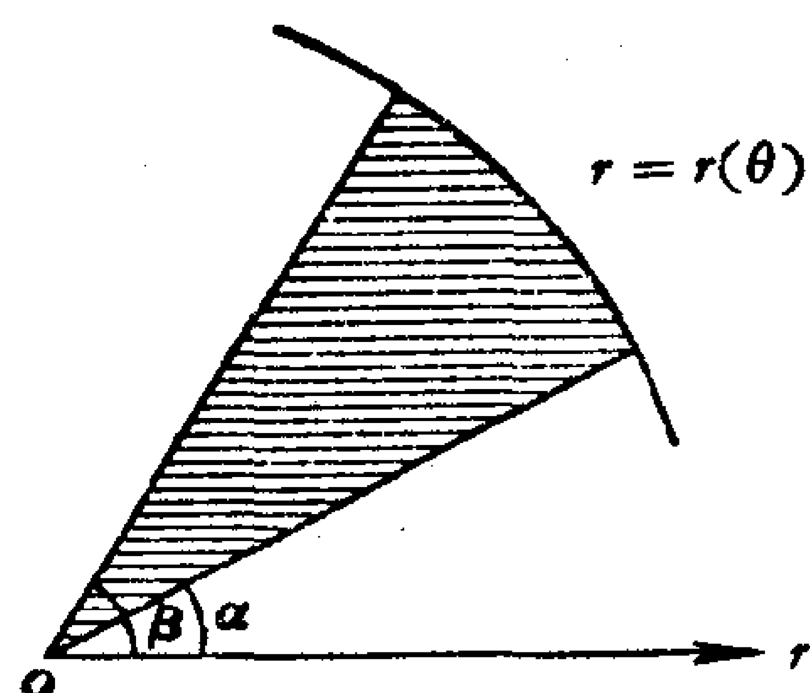


图 5

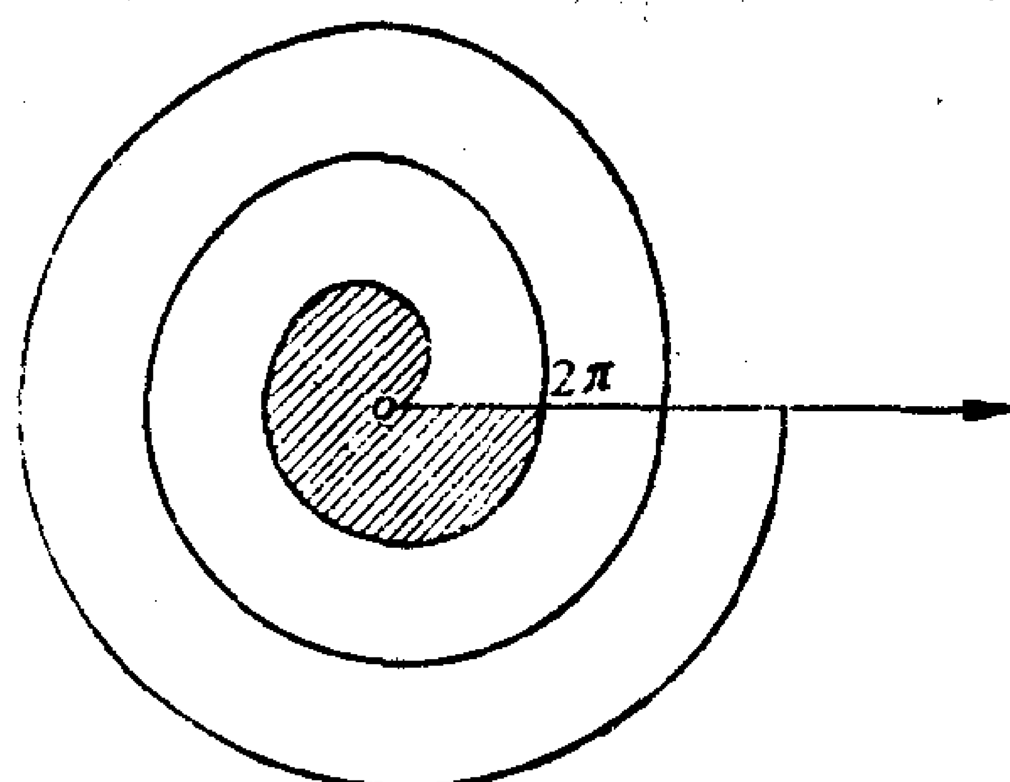


图 6

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta.$$

例 4. 求 Achimede 螺綫 $r = a\theta$ 一环的面积.

所求的面积为

$$\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2\,d\theta = \frac{a^2\theta^3}{6}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3a^2.$$

例 5. 求蝸綫

$$r = a\cos\theta + b,\quad (b \geqslant a)$$

所围成的面积.

所求的面积为

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta + b)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)\theta + \frac{1}{4}a^2\sin 2\theta + 2ab\sin\theta\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}(a^2 + 2b^2).$$

例 6. 求双紐綫 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ 所围成的面积.

总面积是右边一块的面积的两倍,故所求的面积为

$$2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta\,d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta = 2a^2.$$

習题. 求旋輪綫的一支:

$$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t),\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

与 x 轴所围成的面积.

§3. 利用横断面算体积法

用 V 代表一个立体的体积,我們取一条直綫作为坐标軸,其上取一点作为原点. 在离原点 x 处作这軸的一个垂直平面,如果知道所求立体在这垂直平面上所截得的面积等于 $A(x)$,则可由定积分来計算这立体的体积.

再假定这立体在 $x=a$ 与 $x=b$ 二点所作的垂直平面之間，我們在 a, b 間作若干断面把立体分为若干个单元。考虑这样的一个单元，它界于两断面 x 与 $x+\Delta x$ 之間。以 Δx 作高，以 x 的断面作底做出的正柱体的体积等于

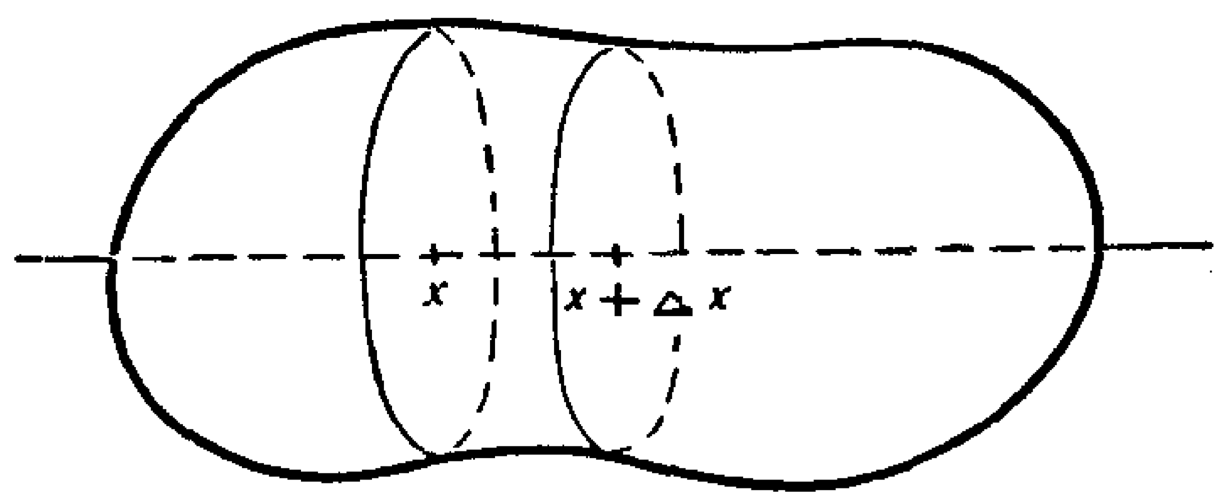


图 7

$$A(x)\Delta x.$$

于是我們得到所要求的体积 V 的近似表达式：

$$\Sigma A(x)\Delta x.$$

当断面无限增加，Δx 的最大値趋向于 0 时，取极限，得一定积分，此卽体积。因而得出以下的結論：

如果已知一个給定的立体的垂直于一定方向所有的横断面的面积，取这些横断面的垂直方向作为 x 軸的方向，則这立体的体积由公式

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

表达，其中 $A(x)$ 是横坐标为 x 的横断面的面积，a, b 为这立体的两端断面的横坐标。

如果我們的立体是一个旋轉体，卽先給定一条曲綫 $y=f(x)$，繞 x 軸旋轉所得出的体，我們的横断面就是以 y 为半径的圓，所以

$$A(x)=\pi y^2,$$

而体积就等于

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

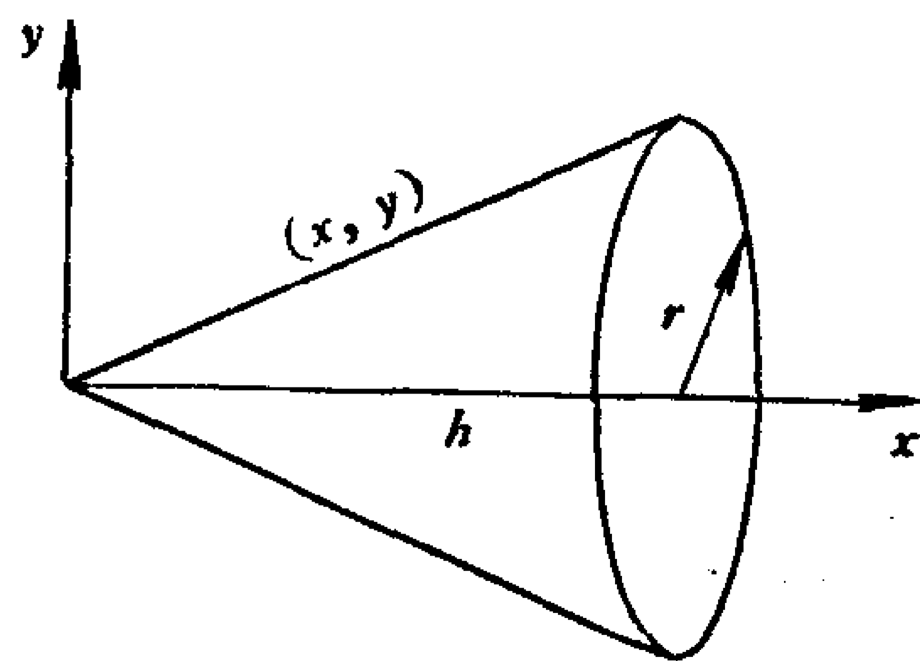


图 8

例 1. 求底半径为 r，高为 h 的圓錐体的体积 V.

命錐体的軸为 x 軸，錐体的頂为原点，以垂直于 x 軸的平面去截这个圓錐体，得一个圓，半径为

$$y=\frac{r}{h}x.$$

因此圓錐体的体积为

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

卽高乘底面积的 1/3.

例 2. 設椭圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 繞 x 軸旋轉，求此迴轉椭圓体的体积 V：

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

例 3. 求抛物体 $2az=x^2+y^2$ 与球 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 的公共部分的体积.

以垂直于 z 軸的平面来截这两个立体.当用 $z=a$ 这张平面去截时,截下来的面积相等,称为截口.

当用平面 $z=\alpha(\alpha<a)$ 去截它們的公共部分时,得半径为 $\sqrt{2a\alpha}$ 的圓. 但当 $\alpha>a$ 时,就得到半径为 $\sqrt{3a^2-\alpha^2}$ 的圓. 因此体积等于

$$2\pi a\int_0^a z\,dz+\pi\int_a^{a\sqrt{3}}(3a^2-z^2)dz=\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5).$$

例 4. 以通过圓柱体底的直径的平面去截这圓柱体，由它切下来的几何形体，称为圓柱弓形体. 試求以与底面成角 α 的平面去截底的半径为 a 的圓柱体时，所得的圓柱弓形体的体积.

取截面通过的直径所在的直綫为 x 軸和底面的圓心为原点. 以垂直于 x 軸的平面去截时,得一个三角形,其面积为

$$\frac{1}{2}y^2\operatorname{tg}\alpha,$$

因此弓形体积等于

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\int_{-a}^a(a^2-x^2)dx=\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}a^2h,$$

此处 h 是圓柱弓形体的高.

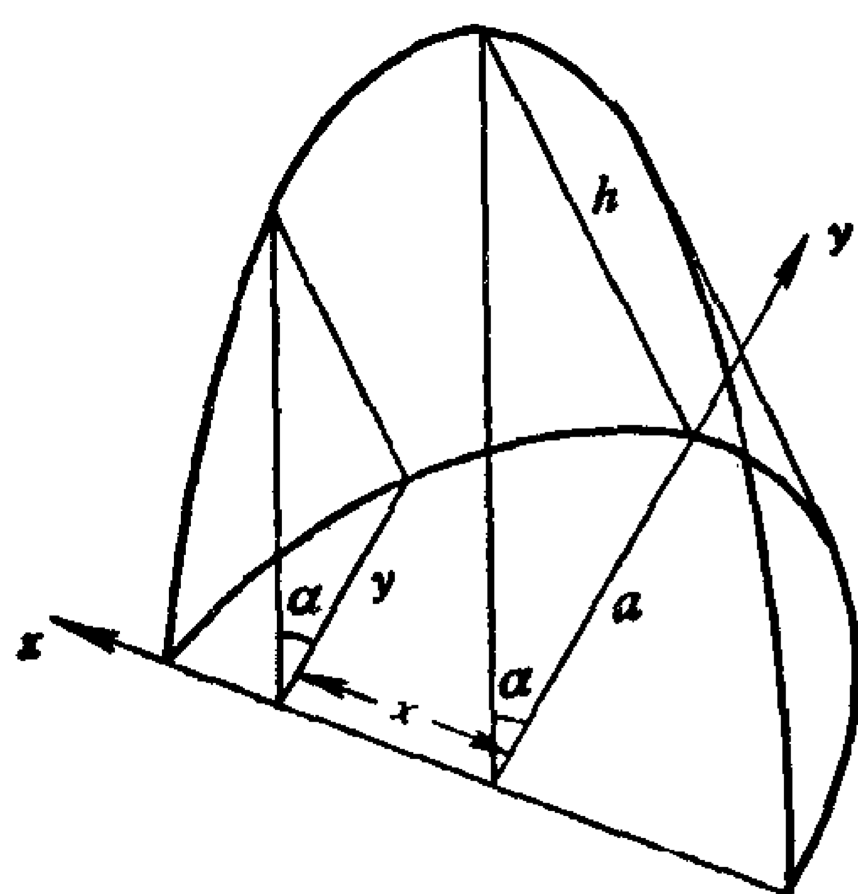


图 9

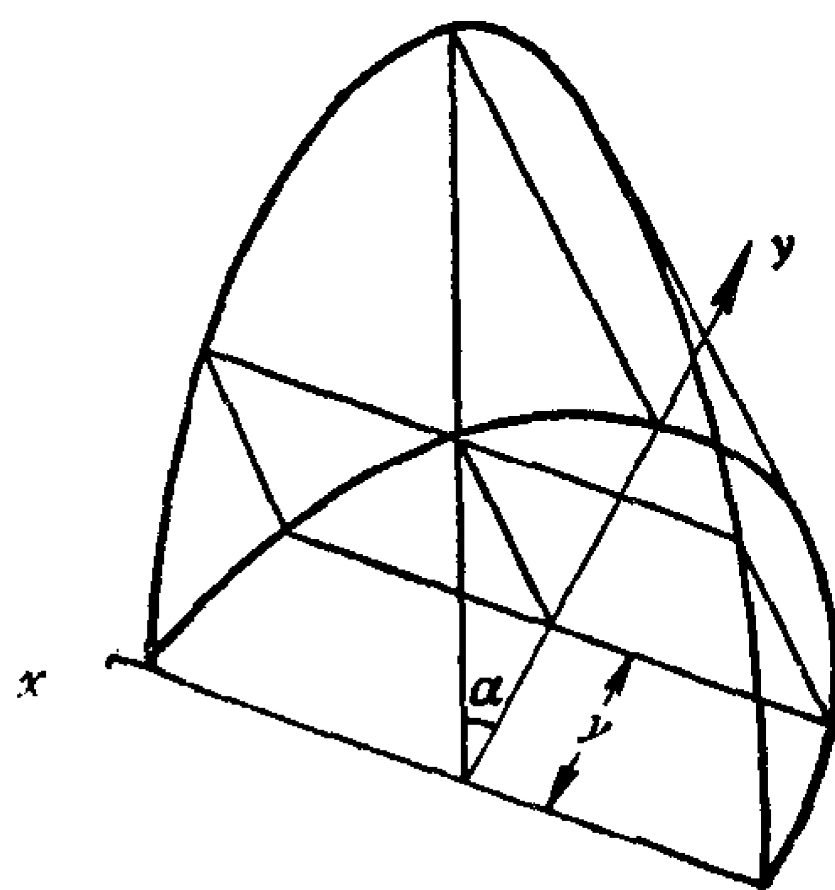


图 10

若以垂直于 y 軸的平面去截时,得到的是矩形,其面积等于

$$2xy\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\alpha\cdot y\sqrt{a^2-y^2}.$$

所以圓柱弓形体的体积等于

$$2\operatorname{tg}\alpha\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}dy=\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}a^2h.$$

習題 1. 試求对应于 $x=0$ 及 $x=b$ 的一段悬鏈綫

$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$$

繞 x 軸旋轉所得的体积.

習題 2. 求旋輪綫的一支：

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

繞 x 軸旋轉所得的体积.

習題 3. 求星形綫 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 繞 x 軸旋轉所得的体积.

習題 4. 求球 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与圓錐 $x^2 = y^2 + z^2 (x \geqslant 0)$ 的公共部分的体积.

§ 4. 旋轉面的側面积

假定在 x, y 平面上有由参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

所定义的曲綫，当 t 由 α 变到 β 时，曲綫由 A 到 B. 我們現在要求出这一曲綫繞 x 軸旋轉所得出的旋轉体的側面积.

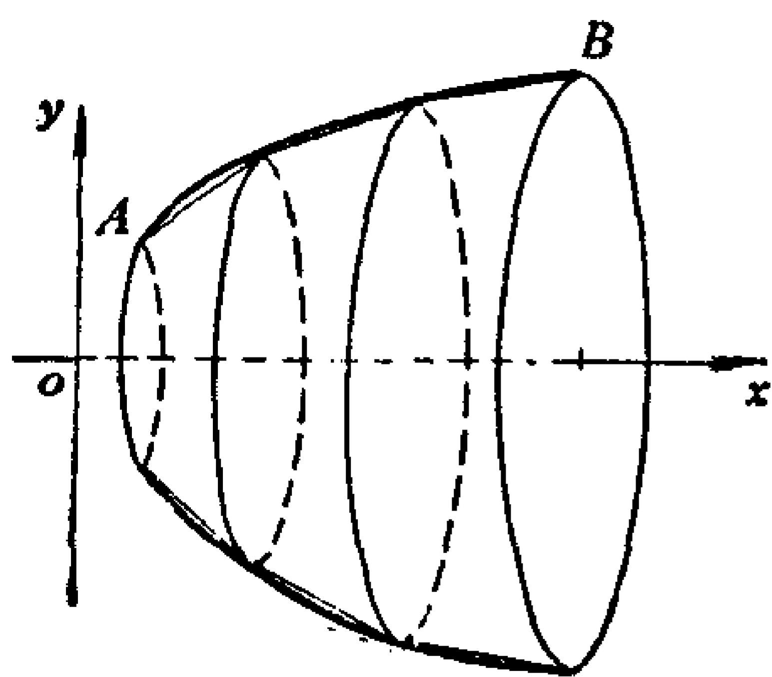


图 11

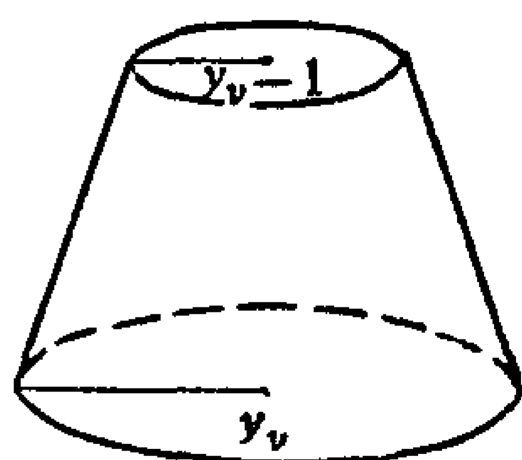


图 12

先作折綫

$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{\nu-1}, M_\nu, \cdots, M_{n-1}, M_n = B.$$

对应的点是

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{\nu-1}, t_\nu, \cdots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

我們先算出这折綫旋轉所得出的側面积. 由綫段 $M_{\nu-1}M_\nu$ 繞 x 軸經旋轉所得出的截錐的两底的半径各为

$$y_{\nu-1} = \psi(t_{\nu-1}), \quad y_\nu = \psi(t_\nu),$$

斜高等于

$$\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2},$$

这截錐的側面积等于

$$\pi[\psi(t_{\nu-1}) + \psi(t_\nu)]\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2}$$
$$= \pi[\psi(t_{\nu-1}) + \psi(t_\nu)](t_\nu - t_{\nu-1})\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau''_\nu)}$$

(用 Lagrange 公式)，此处 τ'_ν，τ''_ν 是 $(t_{\nu-1}, t_\nu)$ 中的数值. 我們現在要考慮的是

$$\pi\sum_{\nu=1}^{n}(\psi(t_\nu) + \psi(t_{\nu-1}))\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau''_\nu)}(t_\nu - t_{\nu-1})$$

的极限. 与处理弧长的原則一样，我們不妨在第一、第二因子中把 $t_{\nu-1}$，τ'_ν，τ''_ν 都換为 t_ν

(这样的变化仅相差一个无穷小),改变后得

$$2\pi\sum_{\nu=1}^{n}\psi(t_\nu)\sqrt{\varphi'^2(t_\nu)+\psi'^2(t_\nu)}\,(t_\nu-t_{\nu-1}).$$

在趋限时,就得到总面积的公式

$$F=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,$$

也就是

$$F=2\pi\int_{(A)}^{(B)}y\,ds.$$

例 1. 求球面(即半径为 r 的圆,繞直径旋轉而成的立体的表面)的面积,取这个圆为

$$x^2+y^2=r^2;$$

而旋轉軸为 x 軸,則球面的面积为

$$2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=4\pi r^2.$$

例 2. 求星形綫 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 繞 x 軸旋轉的立体的表面积 P.

只要将星形綫在第一象限的弧所划出的曲面的面积加一倍即可,故

$$P=2\cdot2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 t\cdot3a\sin t\cos t\,dt$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=12\pi a^2\frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

例 3. 求心脏綫 $r=a(1+\cos\theta)$ 繞极軸旋轉所产生的曲面的面积 P:

$$P=2\pi\int_0^{\pi}y\,ds=2\pi\int_0^{\pi}r\sin\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}4a\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cdot2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=2\pi\cdot8a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

習題 1. 求对应于 $x=0$ 及 $x=b$ 的一段悬鏈綫

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

的弧繞 x 軸旋轉所得的曲面的表面积.

習題 2. 求双紐綫 $r^2=2a^2\cos2\theta$ 繞极軸旋轉所得的曲面的表面积.

習題 3. 求迴轉橢圓体的表面积,即橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

繞 x 軸旋轉所得的曲面的表面积.

習題 4. 求旋輪綫一支

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

繞 x 軸旋轉所得的曲面的表面积.

§5. 柱面的側面积

在 x, y 平面上有一曲綫

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

过这曲綫上的点作平行于 z 軸的直綫,这些直綫成一柱面.

再加一个方程 $z = \chi(t)(\chi > 0)$, 我們要求在 $z = 0$ 平面和 $z = \chi(t)$ 之間的柱面的面积. 我們把 A, B 間的曲线分成为

$$A = M_0, M_1, \cdots, M_{\nu-1}, M_\nu, \cdots, M_{n-1}, M_n = B,$$

它們对应于

$$\alpha = t_0, t_1, \cdots, t_{\nu-1}, t_\nu, \cdots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

作梯形,这个梯形以經过 $M_{\nu-1}, M_\nu$ 的二直綫为边,它的面积等于

$$\frac{z_{\nu-1} + z_\nu}{2}\sqrt{[\varphi(t_{\nu-1}) - \varphi(t_\nu)]^2 + [\psi(t_{\nu-1}) - \psi(t_\nu)]^2}.$$

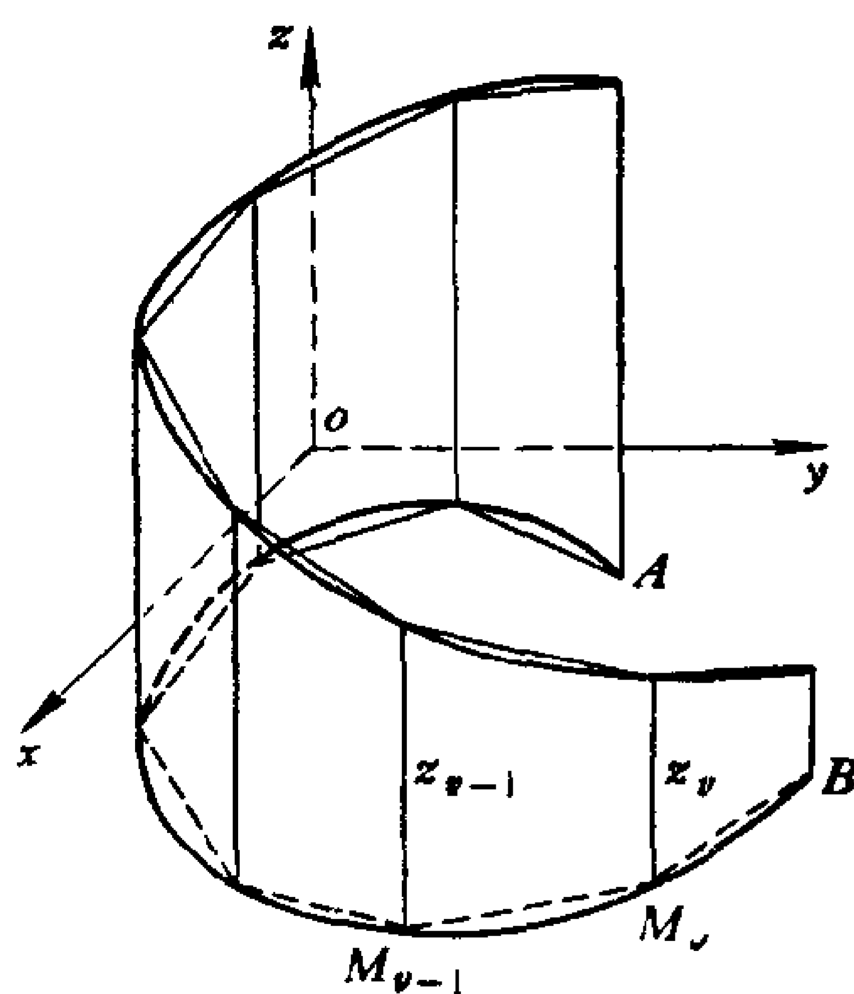


图 13

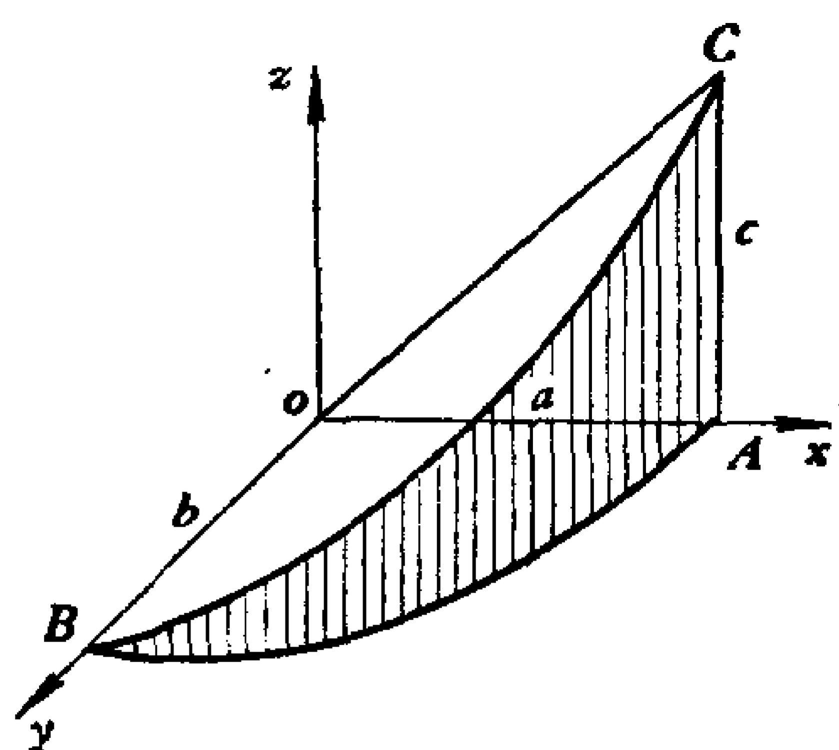


图 14

用与上节相同的方法,我們的問題可以化为求和数

$$\sum_{\nu=1}^{n} \chi(t_\nu) \sqrt{\varphi'^2(t_\nu) + \psi'^2(t_\nu)}\,(t_\nu - t_{\nu-1})$$

的問題,所趋的极限是

$$\int_\alpha^\beta \chi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

例 1. 求 x, y 平面上曲綫

$$y = b - \frac{bx^2}{a^2}$$

上对应于 $x = 0$ 及 $x = a$ 的一段弧上建立的柱面与平面

$$z=\frac{c}{a}x$$

相截后所得的柱面的面积 P (图 14):

$$P=\int_0^a z\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\frac{c}{a}\int_0^a x\sqrt{1+\left(\frac{2bx}{a^2}\right)^2}dx$$

$$=\frac{c}{a^3}\int_0^a x\sqrt{a^4+4b^2x^2}\,dx=\frac{c}{12b^2}[(a^2+4b^2)^{3/2}-a^3].$$

例 2. 如果将上例中曲綫段换为在第一象限中的圓周, 即 $y=\sqrt{a^2-x^2}, (0\leqslant x\leqslant a)$, 則由于当 $x\to a$ 时 $\frac{dy}{dx}\to\infty$,所以上面的公式不能无条件的使用. 采用参数表示法

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

故

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=ac\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=ac.$$

例 3. 求曲綫

$$x=R\sin^2 t,\quad y=R\sin t\cos t$$

在第一象限內的一段上,与高

$$z=R\cos t$$

所构成的柱面的面积 P:

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos t\sqrt{(2R\sin t\cos t)^2+(-R\sin^2 t+R\cos^2 t)^2}\,dt$$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=R^2.$$

(曲綫与 $z=R\cos t$ 所构成的空間曲綫,正好是柱面 $x^2+y^2=Rx$ 与球 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的截口,称为維維亚尼曲綫).

習題 1. 求将例 1 中的曲綫段换为橢圓在第一象限中的一段

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

时的柱面积.

習題 2. 求半径为 r, 軸相交成直角的两圓柱体的公共部分的表面积.

§6. 求 重 心

給定 n 个质点:

$$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),\cdots,M_n(x_n,y_n,z_n),$$

它們的質量各等于

$$m_1,m_2,\cdots,m_n.$$

用

$$M=\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$$

表示总質量，則

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu,\quad \bar{z}=\frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu$$

称为这質点系的重心.

不难驗証，把这一系任意地分为若干組，每一組有一重心. 把这一組的質量完全集中在这些重心上，作出一个新質点組，这新質点組的重心就是原質点組的重心.

我們不討論質点系，我們討論充满平面上某一个区域或某一条綫段的物質. 为簡单起見，我們只考虑均匀分布的物質的情况. 取密度为 1，这样，一条綫段总的質量就可以用这綫段的长度来表它，一块平面区域的質量可以用面积来表示，也可以用体积来表示質量.

先求一条曲綫弧 AB 的重心. 假定它的长是 s，把弧 AB 分为 n 分，$\Delta m=\Delta s$，則

$$\bar{x}=\frac{1}{s}\Sigma x\Delta s,\quad \bar{y}=\frac{1}{s}\Sigma y\Delta s.$$

求极限可知

$$\bar{x}=\frac{1}{s}\int_{(A)}^{(B)} x ds,\quad \bar{y}=\frac{1}{s}\int_{(A)}^{(B)} y ds,$$

而

$$s=\int_{(A)}^{(B)} ds=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

由此推出

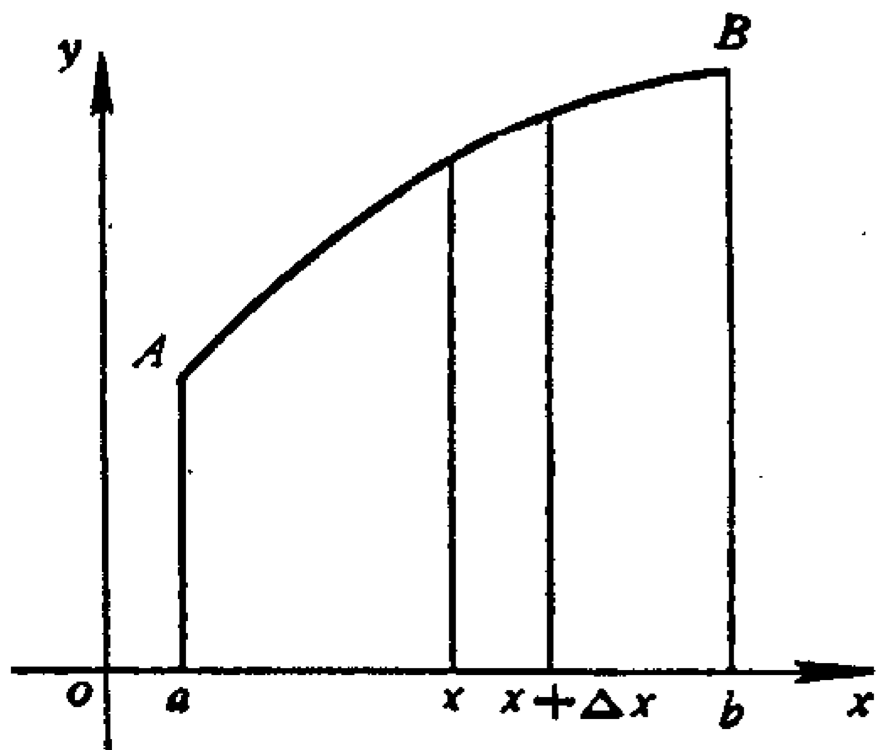


图 15

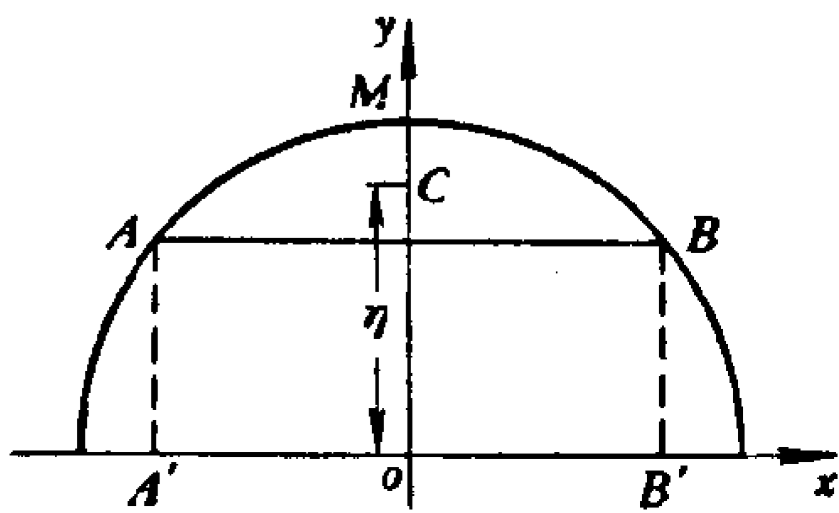


图 16

定理 1 (Guldin Pappus). 由平面上一段已知弧，繞这平面上一条不穿过这弧的直綫作軸，迴轉而成的立体的側面积等于这段弧的长度与这段弧的重心旋轉时經过的路程的长度之积.

証. 取旋轉軸为 x 軸. 由弧 AB 旋轉所成立体的側面积等于

$$2\pi\int_{(A)}^{(B)} y ds=2\pi\bar{y}\cdot s.$$

例 1. 試求半径为 r 的圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的重心位置.

因为这弧对称于通过它的中点M的半径OM，所以重心在这半径上. 为了要确定重心，仅须求出它与圆心o的距离η. 取軸如图所示，并以s表$\overset{\frown}{AB}$弧的长度，d表示弦AB的长，我們所研究的弧繞x軸旋轉，得出球带，它的面积P等于$2\pi rd$. 依 Guldin 定理，这表面积又等于$2\pi\eta s$，所以$s\eta = rd$，即$\eta = \frac{rd}{s}$.

取$\overset{\frown}{AB}$为半圆，即$d = 2r$，$s = \pi r$，則得

$$\eta = \frac{2}{\pi} r.$$

例 2. 求旋輪綫的一支：

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

的重心.

由于对称性，所以重心(ξ, η)的横坐标ξ立刻可以求出

$$\xi = \frac{2\pi a}{2} = \pi a.$$

已知旋輪綫一支的周长为$8a$，又知这一支繞x軸旋轉的表面积为$\frac{64}{3}\pi a^2$（見§1例3及§4习題4），故由 Guldin 定理可知

$$\frac{64}{3}\pi a^2 = 2\pi\eta \cdot 8a.$$

因此$\eta = \frac{4}{3}a$.

再考虑一块平面区域A（它的面积也記之为A）. 为簡单起見，假定这个区域是在两条曲綫之間，这两条曲綫各为

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x).$$

取x到$x + \Delta x$的一小块. 对这一块重心(x_0, y_0)的近似式是

$$x_0 \sim x, \quad y_0 = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2},$$

而$\Delta m \sim (f_2(x) - f_1(x))\Delta x$.

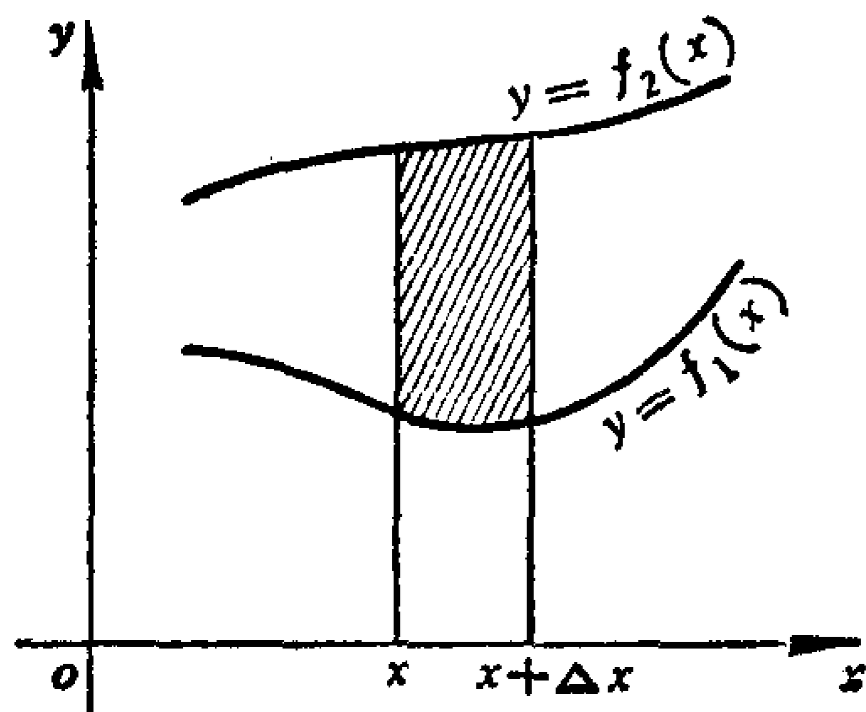


图 17

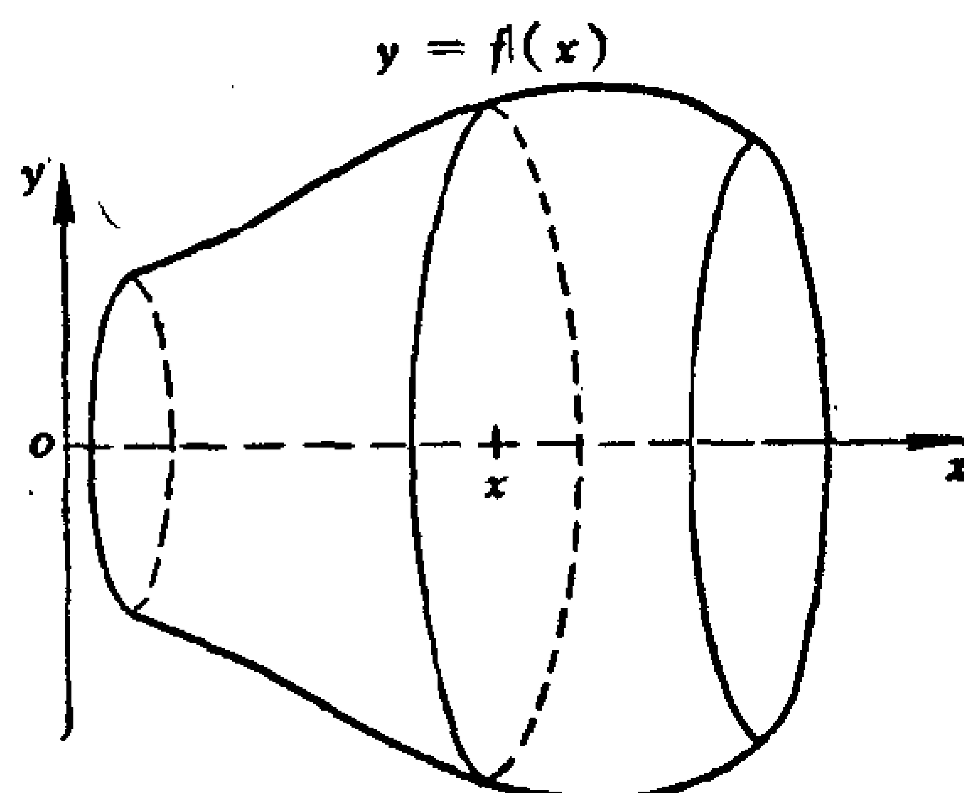


图 18

因此整个面积的重心等于

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\lim_{n\to\infty}\Sigma x_0\Delta m = \frac{1}{A}\int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\lim_{n\to\infty}\Sigma y_0\Delta m = \frac{1}{A}\lim\Sigma\,\frac{f_2(x) + f_1(x)}{2}(f_2(x) - f_1(x))\Delta x$$

$$= \frac{1}{2A}\int_a^b (f_2(x)^2 - f_1(x)^2)dx.$$

由此推出

定理 2 (Guldin Pappus). 由一块平面图形，繞这平面上一条不穿过这图形的直綫为軸，旋轉而成的立体的体积，等于这块图形的面积与它的重心在旋轉时所經过路程的长度的乘积.

証. 取旋轉軸为 x 軸，旋轉体的体积 V 等于由曲綫 $y = f_2(x)$ 与曲綫 $y = f_1(x)$ 旋轉而成的两个旋轉体的体积的差，所以

$$V = \pi\int_a^b f_2^2(x)dx - \pi\int_a^b f_1^2(x)dx = 2\pi\bar{y}A.$$

現在再討論旋轉体的重心. 旋轉体的重心一定在軸上，因之，仅需确定其在旋轉軸上的地位卽足.

在 x 与 $x + \Delta x$ 間的一截旋轉体的体积 $\sim \pi\Delta x(f(x))^2$，其重心 $\sim x$，所以旋轉体的重心

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\lim_{n\to\infty}\pi\Sigma x(f(x))^2\Delta x = \frac{\pi}{V}\int_a^b x(f(x))^2dx,$$

此处 V 是旋轉体的体积.

例. 求抛物綫

$$y^2 = 4ax, \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

繞 x 軸旋轉出来的立体的重心.

現在有

$$V = \pi\int_0^a (f(x))^2dx = \pi\int_0^a 4ax\,dx = 2\pi a^3.$$

又

$$V\bar{x} = \pi\int_0^a x(f(x))^2dx = \pi\int_0^a 4ax^2\,dx = \frac{4}{3}\pi a^4,$$

因此得

$$\bar{x} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^4}{2\pi a^3} = \frac{2}{3}a.$$

§7. 轉动慣量(或平方矩)

一質量为 m 的質点对一軸的轉动慣量定义为

$$I = mr^2,$$

这 r 是这一質点与軸的距离.

一批质量为 $m_1, \cdots, m_n$ 的质点 $P_1, \cdots, P_n$ 的轉动慣量就是

$$I = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu r_\nu^2,$$

这儿 r_ν 是质点 P_ν 到軸的距离.

取軸为 x 軸,这轉动慣量以 I_x 表它,因为由点 (x, y, z) 到 x 軸的距离等于 $\sqrt{y^2 + z^2}$,所以

$$I_x = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(y_\nu^2 + z_\nu^2).$$

同法对 y 軸,z 軸的轉动慣量各为

$$I_y = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(z_\nu^2 + x_\nu^2),$$

$$I_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2).$$

必須注意,一质点对一固定軸的轉动慣量与这一点的位置无关,而仅依賴于这一点对这軸的距离.

例如,$(5, 0, 0)$,$(0, 5, 2)$ 与 $(3, -4, 6)$ 点虽不同,但它們对 z 軸的轉动慣量都是相等的. 实质上,所有的适合于 $x^2 + y^2 = 5^2$ 的点都有相等的轉动慣量. 这些点都是在同一以旋轉軸为中心軸的圓柱面上的.

命 $M = \sum_{\nu=1}^{m} m_\nu$ 是总质量. 由 $\frac{I}{M} = R^2$ 定义 R,称为慣性半径,也就是如果把总质量 M 集中在距軸 R 的点,所得的轉动慣量与原质点系的轉动慣量相等.

我們現在也是仅仅考虑均匀物质的轉动慣量.

一个平面积对 y 軸的轉动慣量. 取一小条,其寬为 dx,曲綫则由 $y = f(x)$ 到 $f(x + \Delta x)$,这一小条的质量 $\sim ydx$,其慣性半径 $\sim x$. 所以

$$I_y = \int_a^b x^2 \cdot y dx.$$

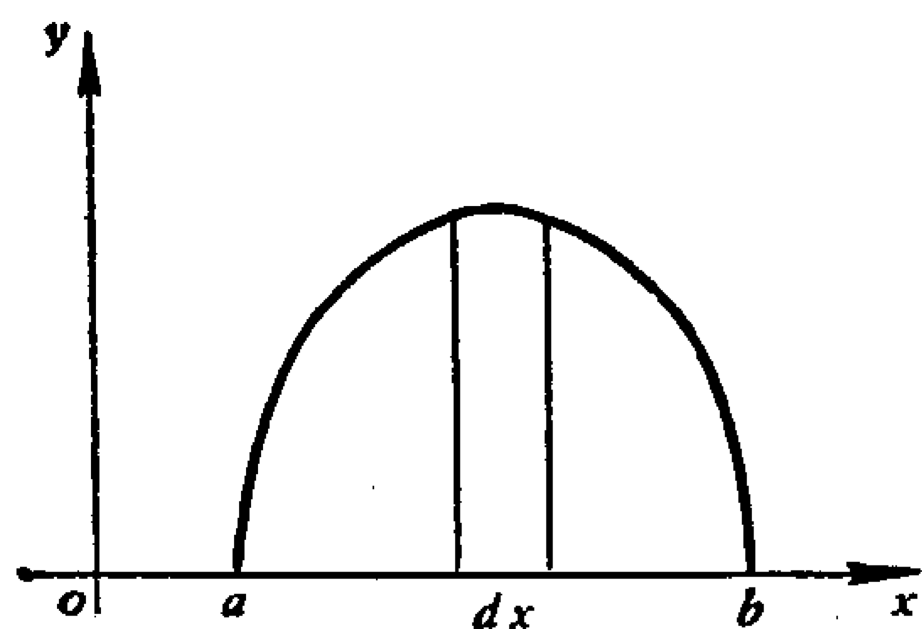


图 19

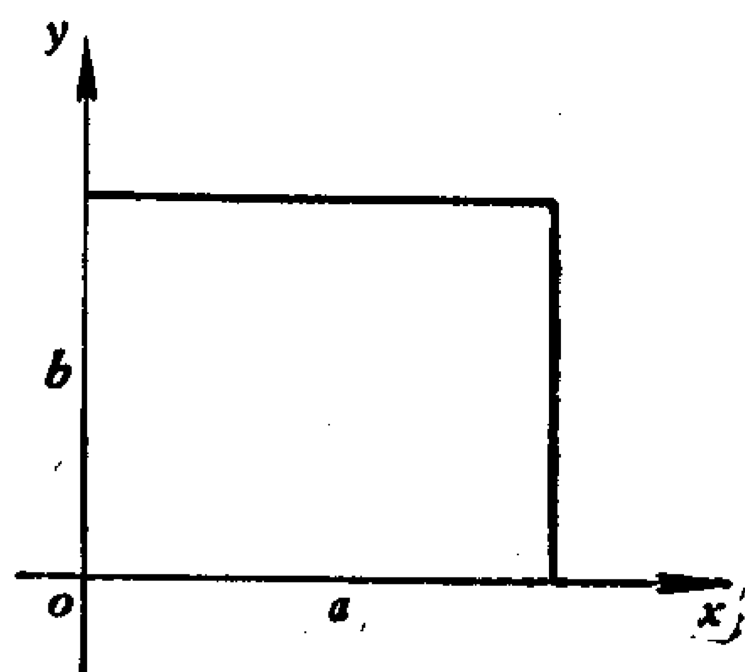


图 20

例 1. 求长方形对其一边的轉动慣量,在上式中 $y = b$,所以

$$I_y = \int_0^a bx^2\,dx = \frac{a^3 b}{3} = \frac{1}{3}a^2(ab).$$

有时候我們要处理这样的間題：求一个平面积对一条垂直于这平面的軸的轉动慣量。我們假定原图形在 x, y 平面上，軸就是 z 軸。在 (x, y) 平面上的一点 (x, y) 与 z 軸的距离就是 $\sqrt{x^2+y^2}$，即与原点的距离。这种情况，我們也称为对原点的轉动慣量：

$$I_z = I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) = I_x + I_y.$$

讀者試自己处理一个旋轉体对其旋轉軸的轉动慣量。

§8. 流 体 压 力

以前曾經涉及过一个力或几个力作用在一个質点上的情况，我們經常遇到这样的間題：并不是一力作用在一个点上，而是分布在一块面积或一块体积上，例如：載沙土的車子，对車旁边的压力；如两个带电的盘子的吸引，如两个球体或其他形状的物体互相吸引的間題，如果我們把物体看成为質点的总合，我們的間題也可以把物体受力的情况看成为諸質点各各受力的总和。

最簡单的例子就是流体的压力，一个平面垂直地插进均匀的流体中去，为了确切起見，我們把 x 軸放在流体面，而把 y 軸的正向向下，插进流体之中。

把面积分为矩形，其長为 x_i，其寬为 Δy。在水下的深度等于 y_i。如这一片并不是垂直的，而是水平方向的，那末在这一片上面的流体的压力就等于在这一片上所承担的流体柱的重量，即 $w \cdot y_i x_i \Delta y$，此处 w 表单位体积流体的重量。由流体的性質，在这一片上的旁压力也 $\sim w y_i x_i \Delta y$，所以

$$F = \lim_{n\to\infty} \Sigma w y x \Delta y = w\int_a^b yx\,dy.$$

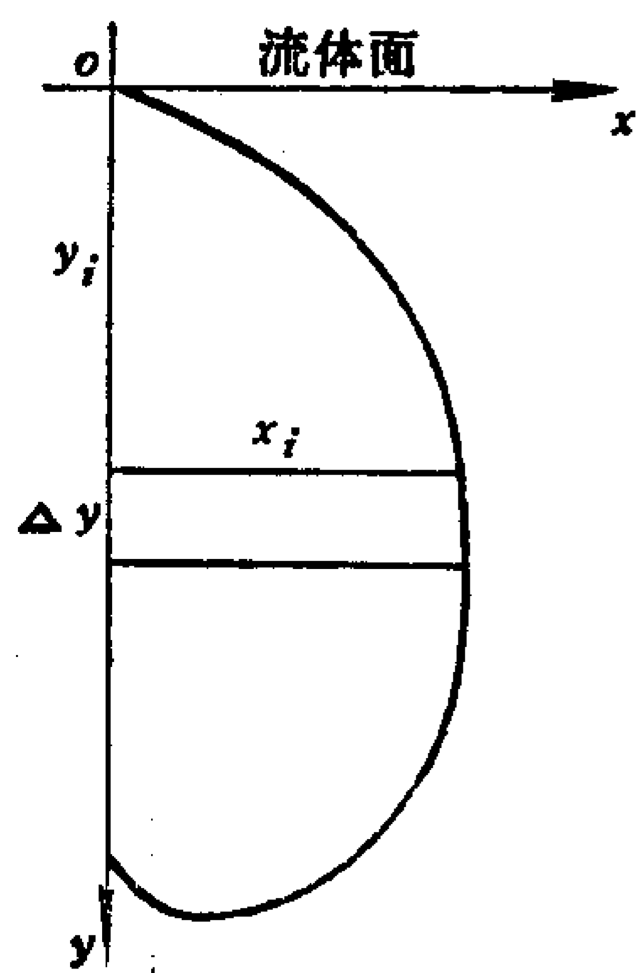


图 21

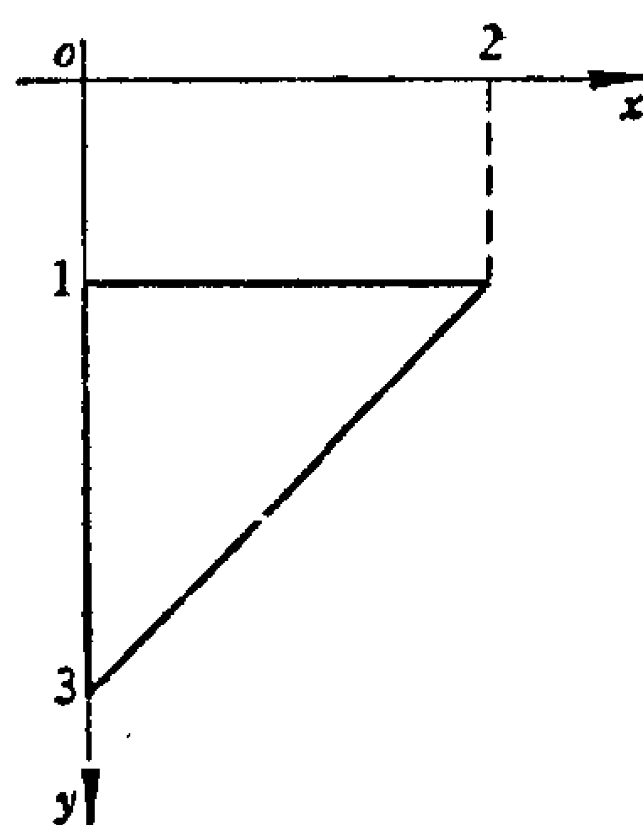


图 22

定理 1. 垂直插进流体的平面积的旁压力等于单位体积流体的重量乘以插进去的面积再乘以重心的深度。

例. 把一块三角板插进水內，这三角板的三頂点各为 $(0,1)$，$(0,3)$，$(2,1)$，斜边方程是

$$x + y = 3,$$

所以

$$F = w\int_1^3 yx\,dy = w\int_1^3 y(3-y)dy = w\left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_1^3 = \frac{10}{3}w.$$

核对：三角形的面积是 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$. 重心的深度是 $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. 由定理1可知 $w\cdot 2\cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}w$.

压力中心．以上的情况看成为一批平行力压在一个垂直面上，即大小如

$$\Delta F_i = wy_i x_i \Delta y$$

的垂直力压在所对应的小片上，这一小片的重心之坐标近似于 $\left(\frac{x_i}{2}, y_i\right)$，这些力可以算出重心．它的坐标就是

$$F\bar{x} = \frac{1}{2}w\int_a^b yx^2\,dy,$$

$$F\bar{y} = w\int_a^b y^2 x\,dy,$$

这个 $(\bar{x}, \bar{y})$ 也称为压力中心.

例．上例中的压力中心的坐标是

$$\bar{x} = \frac{1}{\frac{10}{3}w}\frac{1}{2}w\int_1^3 yx^2\,dy = \frac{3}{20}\int_1^3 y(3-y)^2 dy$$

$$= \frac{3}{20}\left[\frac{9y^2}{2} - 2y^3 + \frac{1}{4}y^4\right]_1^3 = \frac{3}{5},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\frac{10}{3}w}w\int_1^3 y^2 x\,dy = \frac{9}{5}.$$

§9. 功

命一个恆量的力連續地加在一个物体上，使它沿此力的方向移动一个距离 d，則力的大小 F 和距离 d 的乘积称为使这物体移动距离 d 的功.

例如，20公斤的力把一块石头推进了10公尺，則所做的功是

$$w = (20\text{公斤})(10\text{公尺}) = 200\,(\text{公斤-公尺}).$$

我們現在把这一概念推广到变化的力上去.

例1．一个圆柱形的水桶，其底的半径是5公尺，其高是20公尺．注满了水．求把所有的水抽出水桶所做的功.

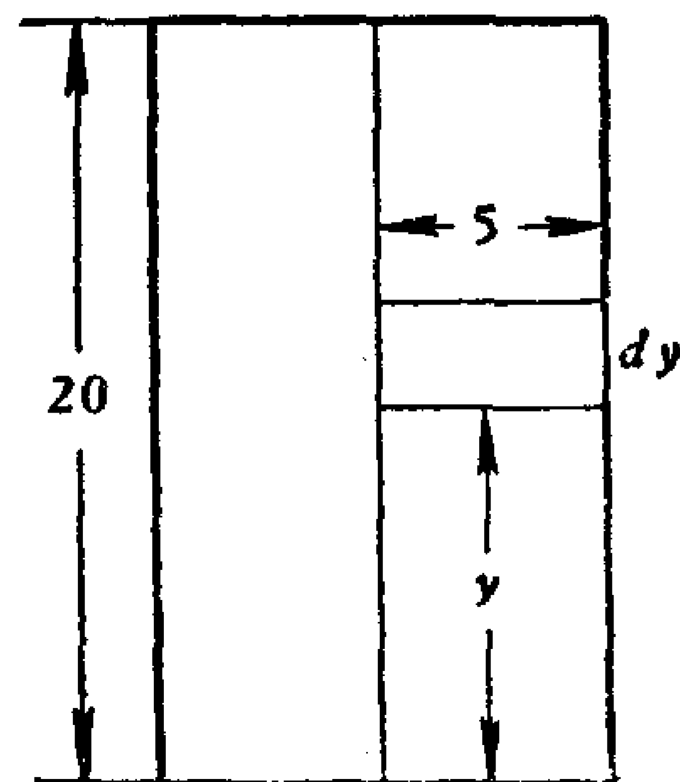


图 23

水桶的縱剖面如图23．現在考虑离桶底 y 公尺的情况．这是一个圆片，体积等于 $\pi\cdot 5^2\cdot dy$（立方公尺），水的重量是每立方公尺的水重一公吨，所以，这圆片的水重等于 $25\pi dy$（公吨），这需要升高 $(20-y)$ 公尺.

把这圆片的水升到桶口所做的功等于

$$25\pi(20-y)dy,$$

所以总功等于

$$W=25\pi\int_0^{20}(20-y)dy=25\pi\left[-\frac{(20-y)^2}{2}\right]_0^{20}=5000\pi(\text{公尺,吨}).$$

例 2. 求将弹簧伸长 S 所作的功 P. 設张力 $p=Cs$, 此处 C 是常数, 则

$$P=\int_0^S pds=C\int_0^S sds=\frac{CS^2}{2}.$$

例 3. 設活塞的面积为 Q, 单位面积上承受的气体膨胀的压力是 p, 求气体膨胀时, 将活塞由距气缸底 S_1 处推至距汽缸底 S_2 所作的功 P:

$$P=Q\int_{S_1}^{S_2}pds.$$

由于 Boyle-Mariotte 定律

$$pv=C,$$

而 $v=Qs$. 作变换 $s=\frac{v}{Q}$, 则得

$$P=\int_{v_1}^{v_2}\frac{C}{v}dv=C\log\frac{v_2}{v_1}=C\log\frac{p_1}{p_2}=p_1v_1\log\frac{p_1}{p_2},$$

此处 $v_1=QS_1$, $v_2=QS_2$, p_1 与 p_2 分别表示过程开始与过程終了时的压力.

假定在膨胀时, 气体与周围没有热流通, 这称为絕热过程. 这时 p 与 v 之間有次之关系:

$$pv^k=C,$$

此处 $k>1$ 与 C 都是常数. 因此

$$P=\int_{v_1}^{v_2}Cv^{-k}dv=\frac{C}{k-1}\left(\frac{1}{v_1^{k-1}}-\frac{1}{v_2^{k-1}}\right).$$

第十二章　多个变元的函数

§1. 变　　数

一直到现在所討論的变数有两种:一种是取自然数值的(或者是取整数值的),这种变数称为离散性的. 例如,貫 $\{a_n\}$ 就是离散变数 n 的函数. 另一种是取实数值的或連續地取一部分实数的,这种变数称为連續性的. 一般平面上的图形 $y=f(x)$ 就是代表連續变数 x 的函数. 我們已往所討論的都是仅有一个变元的情况, 但是客观事物的变化不一定只有一个因素. 往往是在突出地考虑一个因素的作用和影响时,才会出現单变数的情况. 一般講来, 我們經常遇到的是多种因素的情況, 表現成为数学問題也就是多个变数的函数. 有时还可能出現无穷个变数的情况. 我們現在暂不討論无穷个变数的情况. 假定变数的个数是一个定数 n, n 可能是 1, 2, 3, 也可以是大于 3 的自然数. 当 $n=1, 2, 3$ 时, 可以用綫,面,体上的点来說明. 当然,当 $n>3$ 时,不可能有几何空間的明确意义,但是我們仍将保留几何名称.

为了叙述方便,我們用一般的 n, 有时仅叙述 $n=2$ 或 $n=3$ 的情况.

在講一般的 n 时, 讀者最好举出 $n=2$ 或 $n=3$ 的情况来細看一下. 又在講 $n=2$ 或 $n=3$ 时,讀者最好思考一下推到一般 n 有什么困难. 这是一个帮助自己复习的方法.

变元既然有两类,我們自然也就有以下几种不同情况:

1°. 有多个离散变元的情况. 如重貫

$$a_{lm},\quad l, m=0, 1, 2, \cdots$$

及重級数

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{lm}$$

就是有两个离散变元的情况.

2° 多个連續变数的情况. 如两个变数 x, y 的函数

$$f(x, y)$$

在 x, y 平面上的一个范围內变化,又如

$$w=xyz,\quad w=x^2+y^2+z^2$$

在整个三維空間 (x, y, z) 上定义,而

$$w=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$$

仅在单位球內或表面上定义,即

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$$

又如

$$w = \arc\sin\frac{x}{a} + \log y + e^z$$

仅在 $|x| \leqslant a, y > 0, -\infty < z < \infty$ 的范围内定义.

3° 混合的情况. 也就是有一部分变数是离散的，而另一部分是連續的. 例如，在 $[a, b]$ 中定义的函数貫

$$a_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

就属于这种情形.

这几章的目的就是在于研究多变元的情况. 我們先从 2° 型的多变元情况說起.

§2. n 維空間

n 維空間与普通的二維、三維空間相似，我們取 n 个互相垂直的軸：$x_1, x_2, \cdots, x_n$，空間的点用 n 个实数(有时也用 n 个复数)

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

来表它.

如果这 n 个数 $x_1, \cdots, x_n$ 是一个参变数 t 的函数，即

$$x_1 = \varphi_1(t), \cdots, x_n = \varphi_n(t), a \leqslant t \leqslant b,$$

这样所定义出来的軌迹称为 n 維空間的曲綫.

命

$$A = (a_1, \cdots, a_n)$$

及

$$B = (b_1, \cdots, b_n)$$

代表两点，則

$$x_v = a_v + t(b_v - a_v), 1 \leqslant v \leqslant n, 0 \leqslant t \leqslant 1$$

代表一个綫段，即由 A 到 B 的綫段；又当 $-\infty < t < \infty$ 时，則代表过 A, B 二点的直綫.

两点

$$P = (x_1, \cdots, x_n),$$

$$Q = (y_1, \cdots, y_n)$$

的距离定义为

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

对任意三点 P, Q, R，我們有不等式

$$\overline{PQ} + \overline{QR} \geqslant \overline{PR},$$

也就是"三角形的两边之和大于第三边"的性質. 明确些，我們有：

定理 1.

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \cdots + (y_n - z_n)^2} \geqslant \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2}.$$

上式仅当三点 $P=(x_1, \cdots, x_n)$, $Q=(y_1, \cdots, y_n)$, $R=(z_1, \cdots, z_n)$ 在一直綫上时取等号.

證. 命

$$x_\nu - y_\nu = a_\nu, \quad y_\nu - z_\nu = b_\nu,$$

則定理 1 轉变为

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2} \geqslant \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + b_\nu)^2}.$$

平方此式，得

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2 + 2\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2} \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^2 + 2a_\nu b_\nu + b_\nu^2),$$

于是只要証明

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2 \geqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2.$$

現在考慮

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu^2 - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu b_\mu$$
$$= \sum_{\nu<\mu} (a_\nu^2 b_\mu^2 + a_\mu^2 b_\nu^2 - 2a_\nu b_\nu a_\mu b_\mu) = \sum_{\nu<\mu} (a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu)^2.$$

这当然是 $\geqslant 0$ 的. 因而得出定理 1 的不等式.

如果取等号,則得

$$a_\nu b_\mu = a_\mu b_\nu,$$

卽

$$\frac{a_\nu}{b_\nu} = \frac{a_\mu}{b_\mu},$$

亦卽

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

命之为 t，則得 $a_\nu = tb_\nu$. 所以

$$x_\nu = a_\nu + y_\nu = tb_\nu + y_\nu, \quad y_\nu = b_\nu + z_\nu,$$

从而

$$x_\nu = tb_\nu + b_\nu + z_\nu,$$

卽三点都在直綫

$$(\lambda b_1 + z_1, \cdots, \lambda b_n + z_n), \quad -\infty < \lambda < \infty$$

之上.

§ 3. 邻　　域

我們今后将常用以下的一些区域:

1）閉区域

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \cdots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

是一个长方体，我們把它記之为

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n].$$

略去所有的等号，即得开区域

$$a_1 < x_1 < b_1, \cdots, a_n < x_n < b_n.$$

我們以

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n)$$

表它．长方体的边长各为 $b_1 - a_1, \cdots, b_n - a_n$，体积等于 $(b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n)$．这个方体的中心是

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \cdots, \frac{a_n + b_n}{2}\right).$$

定义 1. 以一点 $A = (a_1, \cdots, a_n)$ 为中心的任一开长方体：

$$|x_\nu - a_\nu| < \delta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n$$

称为这点 A 的邻域．

2）适合于

$$x_\nu \geqslant 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

$$x_1 + \cdots + x_n \leqslant h \quad (h > 0)$$

的点所成的集合称为閉单純体．当 $n = 1$ 时，这是一綫段；当 $n = 2$ 时，这是一个三角形；$n = 3$ 时，这是一个四面体．

去掉所有的等号，我們得出开单純体．

3）适合于

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - a_\nu)^2 \leqslant r^2 \quad (\text{或} < r^2)$$

的点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 所成的集合称为以点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 为中心、以 r 为半径的閉球（或开球）．

我們有时也把以 $(a_1, \cdots, a_n)$ 为中心的开球作为点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的邻域．为了区别起見，我們称这样的邻域为球形邻域．

定理 1. 一点 A 的邻域中一定包有一个 A 的球形邻域；反之，在一个 A 的球形邻域內，也一定包有一个 A 的邻域．

證． 給了一个长方体邻域

$$|x_\nu - a_\nu| < \delta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n,$$

其中显然包有球形邻域

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - a_\nu)^2 < \min(\delta_1^2, \cdots, \delta_n^2).$$

反之，在球形邻域

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - a_\nu)^2 < r^2$$

中，也显然包有长方体邻域

$$|x_v - a_v| < \frac{r}{\sqrt{n}}, \quad v = 1, 2, \cdots, n.$$

定义 2. 命M表一个点集. 如果一点P（不一定属于M）的任一邻域都包有M中的点，则P称为集M的聚点.

定义 3. 包有所有的聚点的集合M称为閉集.

例如，閉长方体、閉球、閉单純体都是閉集.

§4. 域

定义 1. 命M表一点集. A为M的某一个点，如果点A有一个充分小的邻域亦在M中，則A点称为M的內点.

仅有內点的集称为开域.

由上面的定理可知，內点的定义幷不因球形邻域还是长方体邻域而变. 开域的定义也如此.

例如，开长方体，开单純体，开球都是开域.

定义 2. 开域M的聚点，不在M中的称为边界点，边界点的全体称为M的边界.

开域加上边界称为閉域.

例如，开长方体

$$a_v < x_v < b_v, \quad v = 1, 2, \cdots, n$$

的边界是由 $2n$ 个"面"所組成的 $(x_v = a_v,\ x_v = b_v)$. 而閉长方体是閉域.

球$\sum_{v=1}^{n} x_v^2 < r^2$的边界是$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. 閉球是閉域.

定理 1. 閉域是閉集，也就是閉域包有一切聚点.

証. 命A为閉域$\overline{D}$的一个聚点，則A的任一邻域一定包有$\overline{D}$的点. 如果任一邻域都包有$\overline{D}$的內点，則A一定是$\overline{D}$的內点或边界点. 如果A的邻域

$$|x_v - a_v| < \delta_v, \quad v = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

仅包有$\overline{D}$的边界点. 命$B = (b_1, \cdots, b_n)$为这样的一点. 在 (1) 內，我們可以做B的邻域，由于B是边界点，所以其中一定包有$\overline{D}$的內点，也就是 (1) 中有$\overline{D}$的內点，因而A是$\overline{D}$的边界点. 定理証毕.

定义 3. 如果一个点集M的所有点都可以包在一个长方体內，就称这个点集为有界点集.

定义 4. 如果域中任二点都可以用完全在这域內的折綫联起来，就称这域为联通域.

如图 24 和图 25 是平面上的联通域，又如球面（图 26）与环面（图 27）也是联通的，但图 29 是不联通的.

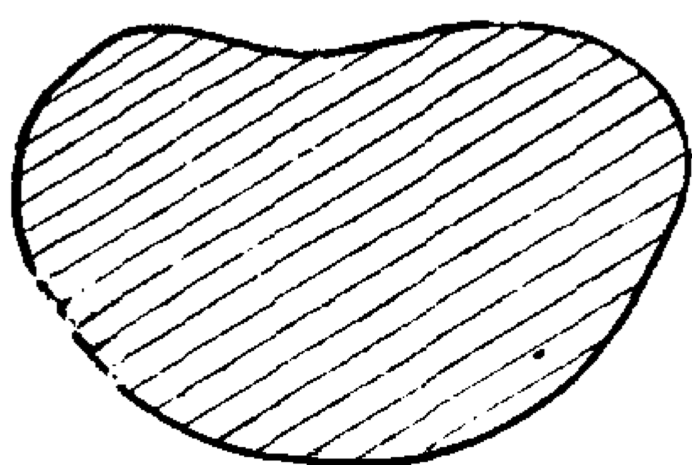


图 24

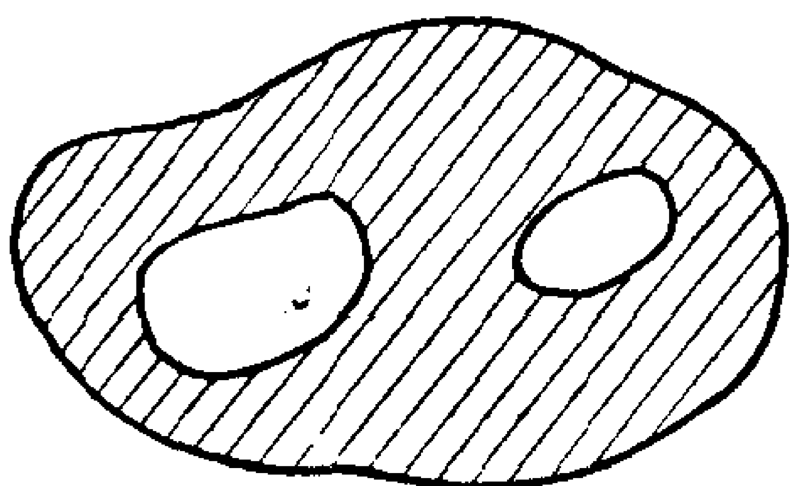


图 25

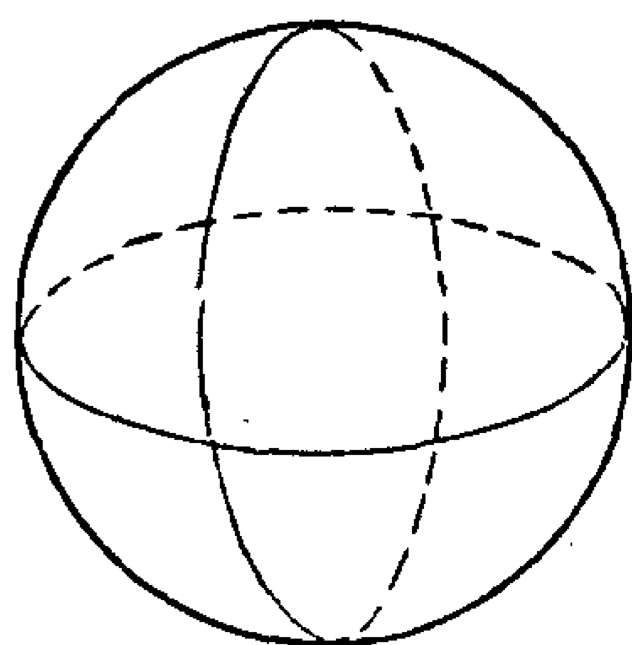
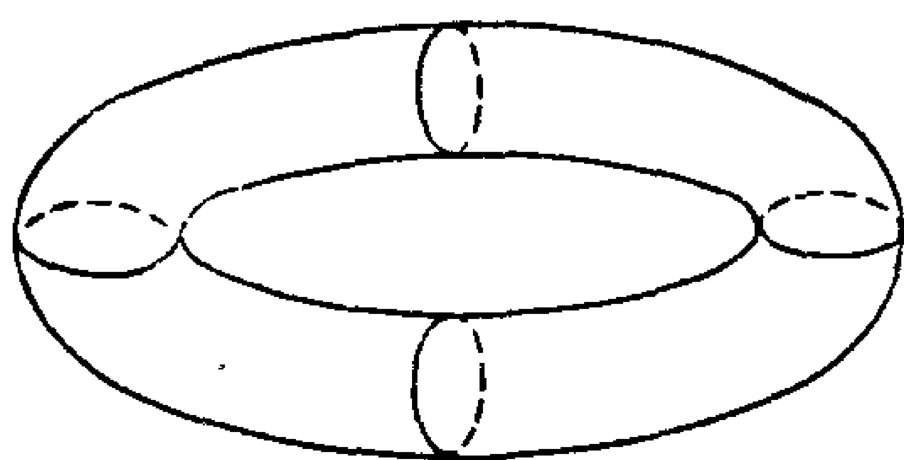
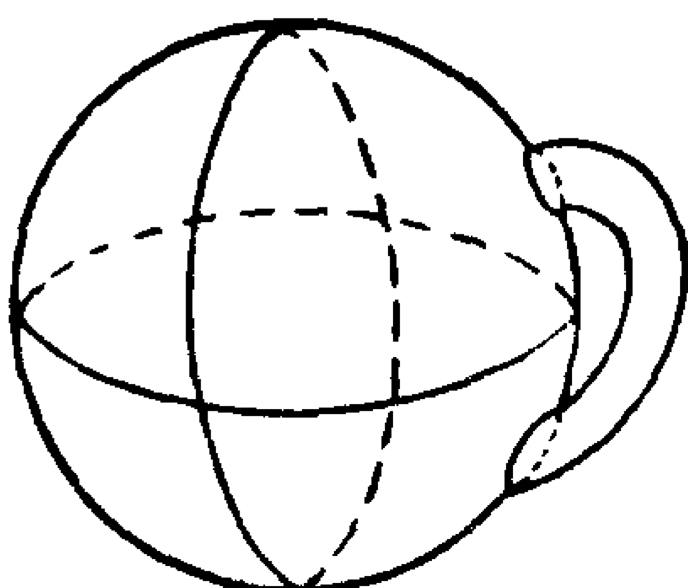


图 26



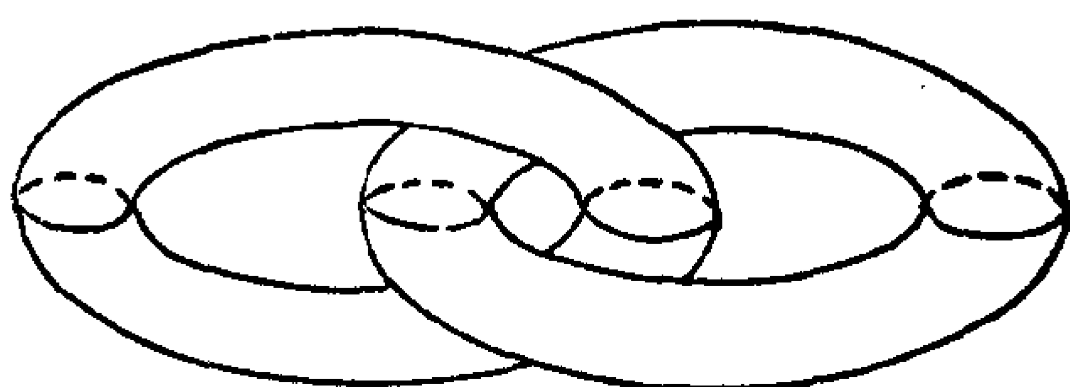
环

图 27



带把的茶壶

图 28



玉連环

图 29

§5. 极限与連續

假定函数

$$f(x_1, \cdots, x_n)$$

在一点 $A=(a_1, \cdots, a_n)$ 的一个邻域内定义(或者更一般些，在一个以 A 为聚点的点集 M 上定义)，但在 A 点可能并沒有定义.

定义. 如果存在有限数 L，給了任意 $\varepsilon>0$，我們可以找出 $\delta>0$，使当

$$|x_\nu - a_\nu| < \delta, \quad \nu = 1, \cdots, n \tag{1}$$

时有

$$|f(x_1, \cdots, x_n) - L| < \varepsilon,$$

則称为当点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 趋于点 $A=(a_1, \cdots, a_n)$ 时 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 趋于极限 L (有时在条件 (1) 外我們更加上 x 属于 M 这一条件). 記为

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, \cdots, x_n) = L.$$

有时为了簡单起見，我們也写作

$$\lim_{x\to A} f(x) = L.$$

不难証明，如果把邻域 (1) 换为球形邻域，結果也是一样的.

仿此可以建立函数的无穷极限的概念. 在 $L=\infty$, $+\infty$ 和 $-\infty$ 的情况，不等式

$$|f(x_1, \cdots, x_n) - L| < \varepsilon$$

各换为不等式

$$|f(x_1, \cdots, x_n)| > E, \quad f(x_1, \cdots, x_n) > E$$

或

$$f(x_1, \cdots, x_n) < -E,$$

此处E是預給的任意正数.

也可以定义 $x_1\to+\infty,\cdots,x_n\to+\infty$ 的情况,卽对任一 $\varepsilon>0$,有$\Delta>0$存在使 $x_1>\Delta,\cdots,x_n>\Delta$ 时

$$|f(x_1,\cdots,x_n)-L|<\varepsilon.$$

記为

$$\lim_{\substack{x_1\to+\infty\\ \cdots\cdots\\ x_n\to+\infty}} f(x_1,\cdots,x_n)=L.$$

現在所談极限的情況比一个变数复杂得多了. 就二維空間来說,就有各种綫路来接近一点. 例如,函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

当沿綫 $y=\lambda x$ 接近于(0,0)时,得

$$\lim_{x\to 0}f(x,\lambda x)=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

可見每一个直綫方向的极限都存在,但是数值随着方向而改变.

又如

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2},$$

則由于先后求极限的次序不同,而結果各异. 如

$$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0}f(x,y)]=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2+y^3}{y^2}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0}f(x,y)]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^2}=1.$$

这說明了处理多变数函数的极限时必須小心,很可能

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}},\qquad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0},\qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}$$

所代表的是不同的东西. 以上例言,第一种极限不存在,第二第三各异.

由此可見,任意地交换两个极限号会造成严重錯誤. 但有了以下的定理,就能保証极限的交换.

定理 1. 假定 1°

$$L=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)$$

存在; 2° 函数

$$\varphi(y)=\lim_{x\to a}f(x,y)$$

存在,則得

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y);$$

又如果 3°

$$\psi(x)=\lim_{y\to b}f(x,y)$$

存在，則两个极限手續可交换.

証. 由定义，給了 $\varepsilon > 0$，必有 $\delta > 0$，使

$$|x - a| < \delta, \quad |y - b| < \delta$$

时

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

使 $x \to a$，則得当 $|y - b| < \delta$ 时

$$|\varphi(y) - L| < \varepsilon,$$

即得定理.

定义. 如果

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n'}} f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1', \cdots, x_n'),$$

就說 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在点 $(x_1', \cdots, x_n')$ 处連續，也就是給了 $\varepsilon > 0$，有 $\delta > 0$ 存在，使

$$|x_1 - x_1'| < \delta, \cdots, |x_n - x_n'| < \delta$$

时

$$|f(x_1, \cdots, x_n) - f(x_1', \cdots, x_n')| < \varepsilon.$$

已經討論过的函数

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0, \quad f(0, 0) = 0$$

除原点以外无处不連續. 但在 $x = 0$, $y = 0$ 这一点并不連續. 对任何一个固定的 x, $f(x, y)$ 是 y 的連續函数，而对一个固定的 y, $f(x, y)$ 也是 x 的連續函数. 这現象告訴我們对各变数的連續函数，并不一定是对两个变数的連續函数. 原因是前者我們仅考虑沿平行于 x 軸或 y 軸方向的趋限法，而我們的全面趋限法却是各种不同的趋限法都要考虑.

定理 2. 假定

$$\varphi_1(t_1, \cdots, t_m), \cdots, \varphi_n(t_1, \cdots, t_m)$$

是在点 $(t_1', \cdots, t_m')$ 附近的連續函数，并且命

$$x_\nu' = \varphi_\nu(t_1', \cdots, t_m'), \quad \nu = 1, \cdots, n.$$

假定

$$u = f(x_1, \cdots, x_n)$$

是在点 $(x_1', \cdots, x_n')$ 附近的連續函数，則

$$u = f[\varphi_1(t_1, \cdots, t_m), \cdots, \varphi_n(t_1, \cdots, t_m)]$$

是在 $(t_1', \cdots, t_m')$ 附近的連續函数.

証. 对任一 $\varepsilon > 0$，我們有 $\delta > 0$，使

$$|x_\nu - x_\nu'| < \delta, \quad \nu = 1, \cdots, n$$

时

$$|f(x_1, \cdots, x_n) - f(x_1', \cdots, x_n')| < \varepsilon.$$

又有 $\eta > 0$ 存在，使当

$$|t_\mu - t_\mu'| < \eta, \quad \mu = 1, \cdots, m$$

时

$$|\varphi_\nu(t_1, \cdots, t_m) - \varphi_\nu(t_1', \cdots, t_m')| < \delta, \quad \nu = 1, \cdots, n,$$

卽

$$|x_\nu - x_\nu'| < \delta.$$

因而得出本定理.

§6. 域内的連續函数

与一个变数相仿,我們有以下的一批定理(証明从略).

定理 1. 假定 $f(x, y)$ 是在某一联通域 D 中的連續函数，如果 D 中有二点使 $f(x, y)$ 値异号,卽

$$f(x_0, y_0)f(x_1, y_1) < 0,$$

則此域中必有一点 (x', y') 使

$$f(x', y') = 0.$$

定理 2 (Bolzano-Weierstrass). 从任一有界貫

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$$

中一定能够选出一个趋于极限的子貫

$$(x_{n_1}, y_{n_1}), (x_{n_2}, y_{n_2}), \cdots, (x_{n_k}, y_{n_k}), \cdots$$
$$(n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots, n_k \to \infty).$$

定理 3. 函数 $f(x, y)$ 在一个有界閉域中定义且連續,則它一定有有限的上下界 m 及 M，卽

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

定理 4. 在一个有界閉域上定义且連續的函数 $f(x, y)$,一定在其上取最大値与最小値.

定理 5 (Heine-Borel). 若平面上的有界閉集 M 能被开域 σ 的无穷組 $\Sigma = \{\sigma\}$ 所遮盖,則恆能从其中选出有限个开域

$$\sigma_1, \cdots, \sigma_n,$$

它也能遮盖 M 的全部.

定理 6. 在有界閉域 D 上連續的函数 $f(x, y)$,一定在其上一致連續,换言之,对任一 $\varepsilon > 0$,我們可以找到 $\delta > 0$,使 D 中的任意二点 (x, y), (x', y') 之适合于

$$|x - x'| < \delta, \quad |y - y'| < \delta$$

者,常有

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

这些定理証明的原則都和一个变数的情形一样,讀者試自己証明. 这些定理还有更一般的抽象形式,为抽象空間的基本性质.

§7. 偏微商与全微分

定义

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f$$

为 $f(x, y, z)$ 对 x 的偏微商．类似地，可以定义 $D_y f$, $D_z f$.

这函数的偏微分的和

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

称为函数 $f(x, y, z)$的全微分.

全微分的意义也可以用下面的方法得出：

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x, y, z)\\ &= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)\\ &\quad + f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x, y, z+\Delta z)\\ &\quad + f(x, y, z+\Delta z)-f(x, y, z).\end{aligned}$$

改变量的主要部分就是全微分.

假定 x, y, z 不是自变量而是参变数 t 的函数，则得公式

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{1}$$

全微分显然有以下的法则：

$$\begin{aligned}d(u\pm v)&=du\pm dv,\\ d(uv)&=\frac{\partial}{\partial x}(uv)dx+\frac{\partial}{\partial y}(uv)dy\\ &=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\\ &=u\,dv+v\,du,\\ d\left(\frac{u}{v}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right)dy=\frac{vdu-udv}{v^2}.\end{aligned}$$

这虽然仍然是旧形式，但是有了新的更广泛的內容.

又如果 x, y, z 是 u, v 的函数，即

$$x=\varphi(u, v),\quad y=\psi(u, v),\quad z=\chi(u, v),$$

则

$$f(x, y, z)=f[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)].$$

对 u, v 的偏微商等于

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

証法与公式（1）的証明完全相同.

乘以 du, dv 而相加，得

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

例 1. $u=x^y (x>0)$ 的偏微商是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \log x.$$

而

$$du = yx^{y-1}\,dx + x^y \log x\, dy.$$

如果 $y = \sin x$，则

$$\frac{du}{dx} = \sin x \cdot x^{\sin x - 1} + x^{\sin x} \cos x \log x = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right).$$

例 2. 命

$$z = y \cdot f(x^2 - y^2),$$

此处 $f(u)$ 是一个有微商的任意函数.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xyf'(x^2 - y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(x^2 - y^2) - 2y^2 f'(x^2 - y^2).$$

由此得

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(x^2 - y^2) + \frac{1}{y}f(x^2 - y^2) - 2yf'(x^2 - y^2) = \frac{z}{y^2},$$

所以函数 z 适合于

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

这是偏微分方程.

例 3. 理想气体的体积 v，压力 p 及絕对溫度 T 之間有关系式

$$pv = RT(R\text{ 是常数}).$$

如果把 T 看作为 pv 的函数，则有

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}.$$

把 v 看为 p, T 的函数，即 $v = \frac{RT}{p}$，则有

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}.$$

把 p 看为 v, T 的函数又有

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}.$$

由此得出热力学上的重要公式

$$\frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{v^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{v}{R} = -\frac{RT}{pv} = -1.$$

注意，异于

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt},$$

我們現在并沒有公式

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial t}.$$

例 4. 由

$$d\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},$$

我們也可以求出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{y}\right)=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{y}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

例 5. 由

$$d\frac{x}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(y^2+z^2-x^2)dx-2xydy-2xzdz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

可以求出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

§8. 齐 次 函 数

函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 之适合于

$$f(tx_1, \cdots, tx_n)=t^{\lambda}f(x_1, \cdots, x_n) \tag{1}$$

者，称为 λ 次齐次函数.

例如，$x^2+7xy+9y^2$ 是二次齐次函数，而

$$\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x(x+y)}\mathrm{tg}\frac{x}{y}$$

就是 0 次齐次式.

把 (1) 式的两边对 t 微商得

$$x_1\frac{\partial f(tx_1, \cdots, tx_n)}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial f(tx_1, \cdots, tx_n)}{\partial x_n}=\lambda t^{\lambda-1}f(x_1, \cdots, x_n).$$

命 $t=1$，卽得

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=\lambda f(x_1, \cdots, x_n). \tag{2}$$

这就是关于齐次函数的 Euler 公式.

定理 如果 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是 λ 次齐次式，且有連續偏微商，则有

$$\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\frac{\partial f}{\partial x_\nu}=\lambda f.$$

反之，任何有連續偏微商的函数，如果适合上式，則是 λ 次齐次式。

証. 我們現在証明其逆. 命

$$\varphi(t)=\frac{f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)}{t^\lambda}.$$

当 $t>0$ 时这函数是有定义且連續的，求 $\varphi'(t)$，其分子等于

$$t^\lambda \frac{d}{dt} f(tx_1, \cdots, tx_n)-\lambda t^{\lambda-1} f(tx_1, \cdots, tx_n)$$

$$=t^\lambda \sum_{\nu=1}^n x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(tx_1, \cdots, tx_n)-\lambda t^{\lambda-1} f(tx_1, \cdots, tx_n).$$

由假定这等于 0，卽 $\varphi'(t)=0$. 由此 $\varphi(t)$ 与 t 无关. 命 $\varphi(t)=c$，再命 $t=1$，可見 $c=f(x_1, \cdots, x_n)$. 因此

$$f(tx_1, \cdots, tx_n)=t^\lambda f(x_1, \cdots, x_n).$$

§9. 切 平 面

命

$$S: \qquad z=f(x, y)$$

代表一曲面. 如果

$$C: \qquad x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

則当 t 变化时，x, y, z 就在曲面上画出一条曲綫 C. 由 §14.1 可知，这曲綫在 (x, y) 点的切綫方程是

$$\frac{X-x}{\varphi'}=\frac{Y-y}{\psi'}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\varphi'+\dfrac{\partial f}{\partial y}\psi'}=\tau.$$

由此得出

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}\varphi'\tau+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'\tau=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y). \tag{1}$$

这称为切面方程. 这当然假定了曲面上任何光滑曲綫都有微商，而其切綫都在平面(1)上.

如果曲面是用参变数法表出的：

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \quad z=\chi(u, v),$$

把 v 看成为常数，則得一曲綫，这曲綫在 (u, v) 的切綫已知其为

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial \psi}{\partial u}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial \chi}{\partial u}}.$$

同法，如果把 u 看成常数，則有切綫

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial \psi}{\partial v}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial \chi}{\partial v}},$$

这两条切綫定一平面，这平面經过点 (x, y, z)，所以是

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

的形式．又因为它經过两条直綫，所以

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial u}+B\frac{\partial\psi}{\partial u}+C\frac{\partial\chi}{\partial u}=0,$$

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial v}+B\frac{\partial\psi}{\partial v}+C\frac{\partial\chi}{\partial v}=0.$$

因此得出

$$A:B:C=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u}\\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

这样得出平面是

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u}\\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}(Y-y)+\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}(Z-z)=0.$$

特别取 $\varphi(u, v)=u$, $\psi(u, v)=v$, $\chi(u, v)=f(u, v)$，这就是刚才得出的切面方程，是切面方程的参变数表示法形式．但須注意，三个行列式同为零的情况必須除外．

習題．試取三点 (u, v), $(u+\Delta u, v)$, $(u, v+\Delta v)$ 作一平面且命 $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$ 的方法而求出切面方程．

隐函数表达法的切面方程．方程

$$F(x, y, z)=0$$

也表示曲面，把 z 看成 x, y 的函数，求偏微商

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

所以得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z},$$

因而切面方程是

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0.$$

例．椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上一点 (x, y, z) 的切面方程是

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0,$$

即

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

§ 10. 沿一定方向的微商

在一点 (x_0, y_0, z_0) 函数 $f(x, y, z)$ 可能有各个不同方向的微商. 命

$$x=x_0+t\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cos\beta,\quad z=z_0+t\cos\gamma,$$

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是方向余弦,則

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)-f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

就定义为函数 $f(x, y, z)$ 沿方向 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的微商,記为

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \mathbf{l}},$$

而 $\mathbf{l}$ 表示方向 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

立刻得出

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

在許多物理問題中,函数 $f(x, y, z)$ 的方向变化率是有用的. 例如,温度場就是:如果給定了所考察物体的每点 (x, y, z) 的溫度 $f(x, y, z)$, 則热的分布和轉移的規律自然地依賴于溫度沿着一切方向升降的速度.

我們現在提出这样的問題:函数在那一个方向增加得快,并且快得怎样? 我們用以下前已証过的不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2),$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ 时取等号, 即得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|^2\leqslant\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

这是因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 故最大大不过

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

且仅当

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\cos\beta}=\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\cos\gamma}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

时最大,即取方向

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},\text{ 等等}$$

增大得最快．又最小小不过

$$-\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

且仅当

$$\cos\alpha=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},\text{ 等等}$$

时最小．

我們定义矢量

$$\mathbf{g}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

为函数 f 的梯度，有时用 $\operatorname{grad} f$ 或 ∇f 表它，其长度

$$|\mathbf{g}|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

如此得出

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}=|\mathbf{g}|\cos(\mathbf{g},\mathbf{l}).$$

也就是 f 对方向 $\mathbf{l}$ 的微商等于 f 的梯度在矢量 $\mathbf{l}$ 上的投影．

§11．高阶偏微商

偏微商还可以再求偏微商，因而得出高阶偏微商．例如，函数 $f(x,y)$ 的二阶偏微商有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

或

$$f''_{xx},\ f''_{xy},\ f''_{yx},\ f''_{yy}.$$

有时候也写成为

$$f_{xx},\ f_{xy},\ f_{yx},\ f_{yy}.$$

f''_{xy} 与 f''_{yx} 是由不同次序求微商而得来的，其結果是否相等需要研究．例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{当}\quad x^2+y^2>0;\\ 0, & \text{当}\quad x=y=0\end{cases}$$

有

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],\quad \text{当}\quad x^2+y^2>0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0.$$

当 x 取 0 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{x=0}=-y$，所以 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\Big|_{x=0}\right]=-1$，即

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=-1.$$

但另一方面可証

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = +1.$$

这例子説明了求微商的次序不同,所求出的結果各异,但是幸亏这种情况并不經常遇到. 在以下的条件下,求微商的次序是可以交换的.

定理 1. 假定 1° 函数 $f(x, y)$ 在开域 D 中定义; 2° f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} 都存在;且 3° 作为 x, y 的函数, f''_{xy}, f''_{yx} 在某点 (x_0, y_0) 是連續的,則

$$(f''_{xy})_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = (f''_{yx})_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

証. 考察

$$W = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk},$$

式中 h, k 都异于 0 且充分小,使点 $(x_0 + h, y_0 + k)$ 在 D 之中.

命

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}.$$

由 2° 可知

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)}{k}$$

存在且連續.

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

由 Lagrange 定理得

$$W = \varphi'(x_0 + \theta h) = \frac{f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)}{k},$$

$$0 < \theta < 1.$$

由于 f''_{xy} 存在,所以再用一次 Lagrange 公式得

$$W = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k), \quad 0 < \theta' < 1.$$

同样方法可得

$$W = f''_{yx}(x_0 + \tau h, y_0 + \tau' k), \quad 0 < \tau, \tau' < 1,$$

即得

$$f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k) = f''_{yx}(x_0 + \tau h, y_0 + \tau' k).$$

命 $h, k \to 0$, 由 3° 可知

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

上例失敗的原因是

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right), \quad x^2 + y^2 > 0$$

在 $x = 0$, $y = 0$ 并不連續.

更一般些

$$f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{yxx}$$

等等都可以在交换两个的基础上推出它們相等的条件. 因而有

定理 2. 假定 $f(x, y)$ 定义于一开域中. 在这域中有一切 k 阶連續偏微商，則任一 k 阶偏微商的求得与微分运算的次序无关.

以后我們不再为偏微商的次序操心，經常假定是可以交換次序的情况，我們常写成为

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}, \quad \alpha + \beta + \gamma = k,$$

而不顧其次序了.

再研究高阶微分：由

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

可得

$$\begin{aligned} d^2u &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = dx\left(d\frac{\partial f}{\partial x}\right) + dy\left(d\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= dx\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy\right) + dy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

同样

$$d^3u = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3.$$

我們引进微分記号

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{\partial^n f}{\partial x^l \partial y^{n-l}} dx^l dy^{n-l},$$

这儿 $\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$ 是二項式系数，这可以用归納法証明. 因为

$$\begin{aligned} d^{n+1}u &= d\left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^l \partial y^{n-l}}\right) dx^l dy^{n-l}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{l+1} \partial y^{n-l}} dx + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^{n-l+1}} dy\right) dy^{n-l} dx^l \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left[\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}\right] \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^{n+1-l}} dx^l dy^{n+1-l} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} dx^{n+1} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}} dy^{n+1} \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^{n+1-l}} dx^l dy^{n+1-l}. \end{aligned}$$

这是在把 dx 与 dy 作为自变量的微分的情况下进行的，即把 dx 与 dy 当作常量. 如果 dx 与 dy 不算作常量，我們的結論必須修改，我們有

$$\begin{aligned} d^2u &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y} dy\right) \\ &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial x} d^2x + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y. \end{aligned}$$

例如,在求函数

$$u = u(x, y), \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

的 $\frac{d^2u}{dt^2}$ 时,可以发現

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\psi'(t)$$

及

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\varphi'^2(t) + 2\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}\varphi'(t)\psi'(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\psi'^2(t)$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial x}\varphi''(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\psi''(t).$$

但如果錯誤地运用公式

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cdot dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot dy^2,$$
$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt,$$

則所得出来的結果将与事实不符了.

§ 12. 隐 函 数

在什么条件之下,可以保証由

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

决定的函数 z, 作为 x, y 的函数的連續性和可微分性,我們有以下的定理.

定理 1. 假定 $F(x, y, z)$ 为一个三变数的函数, 且适合以下的条件: 1° $F(x_0, y_0, z_0) = 0$; 2° 在以 (x_0, y_0, z_0) 为中心的一邻域

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta, \quad |z - z_0| < \delta \tag{2}$$

中 $F(x, y, z)$ 是連續的; 3° 当 x, y 固定时, $F(x, y, z)$ 是 z 的单調函数(在以下証明中, 我們假定它随 z 增加而单調增加), 則有以下的結論: 在 (x_0, y_0, z_0) 的某一邻域內, (1) 确定了 z 是 x, y 的单值連續函数 $z = f(x, y)$ 且 $z_0 = f(x_0, y_0)$.

証. 1) 单值性.

先考慮函数 $F(x_0, y_0, z)$. 由 1° 及 3° 可知, 当 $z < z_0$ 时 $F(x_0, y_0, z) < 0$, 且当 $z > z_0$ 时 $F(x_0, y_0, z) > 0$. 所以有 δ 存在,使

$$F(x_0, y_0, z_0 - \delta) < 0, \quad F(x_0, y_0, z_0 + \delta) > 0.$$

再考慮函数

$$F(x, y, z_0 - \delta), \quad F(x, y, z_0 + \delta).$$

我們一定有一个邻域

$$|x - x_0| < \delta_0, \quad |y - y_0| < \delta_0, \tag{3}$$

在其中(由性質 2°)

$$F(x, y, z_0 - \delta) < 0, \quad F(x, y, z_0 + \delta) > 0. \tag{4}$$

在区間(3)中任一点$(\bar{x}, \bar{y})$，我們考虑单变数z的函数

$$F(\bar{x}, \bar{y}, z).$$

由(4)显然有

$$F(\bar{x}, \bar{y}, z_0-\delta)<0, \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z_0+\delta)>0,$$

从3°可以推得有唯一的$\bar{z}$使

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=0, \quad z_0-\delta<\bar{z}<z_0+\delta,$$

也就是在

$$|x-x_0|<\delta_0, \quad |y-y_0|<\delta_0, \quad |z-z_0|<\delta$$

之中，由(1)定义了一个单值函数$z=f(x, y)$.

2）連續性.

如果取$\bar{x}=x_0, \bar{y}=y_0$，則得$z_0=f(x_0, y_0)$. 如果取δ是任与的$\varepsilon>0$，我們一定有$\delta_0>0$存在，使在

$$|x-x_0|<\delta_0, \quad |y-y_0|<\delta_0$$

中

$$|z-z_0|<\varepsilon,$$

卽

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon.$$

这証明了在(x_0, y_0)处，$f(x, y)$的連續性.

又对(3)中任一点(x, y)，$f(x, y)$的連續性也可以类似地証明.

定理 2. 假定$F(x, y, z)$为一个三变数的函数，且适合以下的条件：1° $F(x_0, y_0, z_0)=0$；2° 在以(x_0, y_0, z_0)为中心的一邻域

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta, \quad |z-z_0|<\delta$$

中，$F(x, y, z)$及$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$是存在且連續的；$3^\circ$ $\left.\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}} \neq 0$. 除去定理1中的一切結論外，还可以証明在$x=x_0$，$y=y_0$附近$f(x, y)$有連續偏微商$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$.

証. 由3°我們不妨假定$\left.\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}}>0$，因而可以假定有$\delta'>0$存在，使

$$|x-x_0|<\delta', \quad |y-y_0|<\delta', |z-z_0|<\delta'$$

时，$F'_z(x, y, z)>0$. 由此推出$F(x, y, z)$适合于定理1的所有的条件，因而得出定理1所有的結論. 今往証明$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$的連續性.

給$x, \Delta x$及y. 命$f(x+\Delta x, y)=z+\Delta z$. 由

$$F(x+\Delta x, y, z+\Delta z)=0 \quad 及 \quad F(x, y, z)=0$$

显然可見

$$\Delta F=F(x+\Delta x, y, z+\Delta z)-F(x, y, z)=0.$$

由全增量公式可知

$$0 = \Delta F = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta z,$$

此处 α, β 随 $\Delta x \to 0$, $\Delta z \to 0$ 时而趋于零,即得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = -\frac{F_x'(x, y, z) + \alpha}{F_z'(x, y, z) + \beta}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)} = -\frac{F_x'[x, y, f(x, y)]}{F_z'[x, y, f(x, y)]}.$$

分子分母都是連續函数,且分母非零,因而 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是 x, y 的連續函数,同法 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 也是 x, y 的連續函数.

定义. 一个函数 $F(x, y, z)$ 如果有 n 阶連續偏微商,則称为属于 C^n 类.

以上的定理証明了,如果在某点附近 $F(x, y, z)$ 属于 C^1 类,则由 $F(x, y, z) = 0$ 决定的函数 z 也属于 C^1 类 $\left(如果 \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0\right)$.

更一般些有

定理 3. 如果在某点附近 $F(x, y, z)$ 属于 C^n 类,而且在該点 $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$,则由 $F(x, y, z)$ 所定义的函数 $z = f(x, y)$ 也属于 C^n 类.

我們将不証明这一定理,而仅指出 $n = 2$ 的情况:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}\right) \\
&= \left[-F_z'\frac{\partial}{\partial x}F_x' + F_x'\frac{\partial}{\partial x}F_z'\right]\Big/ F_z'^2 \\
&= \left[-F_z'\left(F_{xx}'' + F_{xz}''\frac{\partial z}{\partial x}\right) + F_x'\left(F_{xz}'' + F_{zz}''\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\Big/ F_z'^2 \\
&= \frac{2F_x'F_z'F_{xz}'' - F_z'^2F_{xx}'' - F_x'^2F_{zz}''}{F_z'^3}.
\end{aligned}$$

§ 13. Taylor 展开

命 $f(x, y)$ 表 x, y 的函数,以下需要多少阶偏微商就假定它有多少阶偏微商.

命

$$\varphi(t) = f(a + th, b + tk),$$

所以

$$\varphi(0) = f(a, b), \quad \varphi(1) = f(a + h, b + k).$$

由带余項的 MacLaurin 公式可知

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^n(0)}{n!} + \frac{\varphi^{n+1}(\theta)}{(n+1)!},$$
$$0 < \theta < 1,$$

另一方面

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f,$$

因而得出

$$\varphi^{(p)}(t)=\frac{d^p\varphi}{dt^p}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f=\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}h^r k^{p-r}\frac{\partial^p f}{\partial x^r\partial y^{p-r}}.$$

故

$$\varphi^{(p)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}$$

及

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x,y)\Big|_{\substack{x=a+\theta h\\y=b+\theta k}}.$$

代入原式,即得 Taylor 公式

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x,y)\Big|_{\substack{x=a+\theta h\\y=b+\theta k}}.$$

在公式中如果以 x 替 a, y 替 b, 自变数的改变量 h, k 各以 dx 及 dy 表示, 且命

$$\Delta f(x,y)=f(x+dx,y+dy)-f(x,y).$$

如此得

$$\Delta f(x,y)=df(x,y)+\frac{d^2f(x,y)}{2!}+\cdots+\frac{d^nf(x,y)}{n!}+\left[\frac{d^{n+1}f(x,y)}{(n+1)!}\right]_{\substack{x+\theta dx\\y+\theta dy}}.$$

与 Lagrange 公式相仿,我們有

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf'_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf'_y(x+\theta h,y+\theta k),$$
$$0<\theta<1.$$

§14. 极大与极小

假定 $f(x,y)$ 在域 D 內定义,并且 (a,b) 是 D 的內点.如果 (a,b) 有一个邻域, $f(a,b)$ 常不小于邻域中的其他的 $f(x,y)$, 則 $f(a,b)$ 称为极大. 同法定义极小.

我們現在假定 $f(x,y)$ 有連續偏微商存在,以下用到 r 次,就假定它有 r 次存在.

考虑函数

$$\varphi(t)=f(a+\lambda t,b+\mu t),\quad \lambda^2+\mu^2>0,$$

这是 t 的函数,且当 $t=0$ 时取极大値. 因此可知,极值的必要条件为

$$\varphi'(0)=0,$$

即对任意的 λ, μ 常有

$$\left[\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\mu\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_{\substack{x=a\\y=b}}=0.$$

特别取 $\lambda=1,\mu=0$ 及 $\lambda=0,\mu=1$，可得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=0.$$

由此可見，一个多元函数在某点(內点)为极大値或极小値，只有当在該点的每个偏微商等于 0 或不存在时才有可能. 又

$$\varphi''(0)=\left(\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\lambda\mu\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\mu^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}.$$

如果对所有的 λ,μ $(\lambda^2+\mu^2>0)$ 我們常有

$$\varphi''(0)<0,$$

对取任何方向而言，則 $f(x,y)$ 在 (a,b) 点所取的值是极大值，也就是如果用 Lagrange 公式

$$f(x,y)-f(a,b)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\lambda^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\lambda\mu+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mu^2,$$

此处 $\lambda=x-a,\mu=y-b$，而

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

中的 x,y 都代以 $a+\theta(x-a),b+\theta(y-b),0<\theta<1$，則当 x,y 充分接近于 a,b 时，$f(x,y)<f(a,b)$，因而 $f(a,b)$ 是极大值.

因此我們的問題一变而为怎样的 A,B,C 可以对任意的不全为 0 的 λ,μ

$$A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2<0.$$

显然需要 $A<0$. 又由

$$A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2=A\left(\lambda+\frac{B}{A}\mu\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\mu^2 \tag{1}$$

可知，也需要 $C-\frac{B^2}{A}<0$. 不然，我們可以取 $\mu=1$ 及 $\lambda=-\frac{B}{A}$，而使 $A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2$ 为非負.

反之，如果

$$A<0,\quad C-\frac{B^2}{A}<0,$$

則由 (1) 可知，常有 $(\lambda^2+\mu^2=0$ 除外$)$

$$A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2<0.$$

因而得出：

如果在 $x=a,y=b$ 这一点

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)<0,$$

則 $f(x,y)$ 在这一点取极大值.

总之，求两个变数的函数 $f(x,y)$ 的极值的方法如下:

1° 先解出方程

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

2° 命 a, b 是以上的解的一个，命

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} = C,$$

则可用下表来得到解答.

$B^2 - AC$	+	−	+	0
A	−	+		
	极 大 值	极 小 值	不是极大极小	可 疑

这个表上的第一个結論（取极大值）如上；第二个結論的証法也相仿佛；关于第三个結論，即

$$B^2 - AC > 0$$

的情况，则由

$$A\lambda^2 + 2B\mu + C\mu^2 = 0$$

可以得实数解答：

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}\mu.$$

对这样的 $\lambda, \mu, \varphi''(0) = 0$. 并可取 λ, μ 使有时 $\varphi''(0) > 0$，有时 $\varphi''(0) < 0$，所以在 a, b 点不可能取极值.

对于最后一个結論，我們可以依一个变数的方法，再看 $\varphi'''(0)$, $\varphi^{iv}(0)$ 等.

如果 D 是一个閉域，假定 $f(x, y)$ 在其中連續，我們已知 $f(x, y)$ 在 D 的內点或周界上取最大值，因此求最大值的方法是找出一切的 $f'_x = f'_y = 0$ 的內点，算出这些点的函数值. 然后与周界上的函数值相比較，最大的就是域 D 的函数最大值.

例 1. 求

$$u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

的最大值，此处 x 与 y 适合 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 2\pi$.

由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - \cos(x + y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y - \cos(x + y) = 0,$$

得 $x = y = \frac{2\pi}{3}$. 此时 $u = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 而在区域的周界 $x = 0$, $y = 0$ 及 $x + y = 2\pi$ 上，$u = 0$. 故在 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 函数达到最大值.

例 2. 求

$$u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 \quad (a > b > c > 0)$$

的最大値及最小値，其中 x, y, z 适合

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

以 $z^2=1-x^2-y^2$ 代入 u，則

$$u=(a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+c^2-[(a-c)x^2+(b-c)y^2+c]^2,$$

此处 x 与 y 适合 $x^2+y^2\leqslant 1$.

由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x(a-c)\{(a+c)-2[(a-c)x^2+(b-c)y^2+c]\}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y(b-c)\{(b+c)-2[(a-c)x^2+(b-c)y^2+c]\}=0$$

得出

$$x=y=0(\text{此时 } u=0);\ x=0,\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u=\frac{1}{4}(b-c)^2\right);$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=0\left(u=\frac{1}{4}(a-c)^2\right).$$

現在轉而考慮周界 $x^2+y^2=1$ 上的函数値. 以 $y^2=1-x^2$ 代入 u,

$$u=(a^2-b^2)x^2+b^2-[(a-b)x^2+b]^2,$$

此处 $x\in[-1,1]$. 由

$$\frac{du}{dx}=2(a-b)^2x(1-2x^2)=0$$

得

$$x=0(u=0);\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u=\frac{1}{4}(a-b)^2\right),$$

而对应于 $x=\pm 1$ 时 $u=0$.

因此函数在 $(0,0,\pm1)$, $(0,\pm1,0)$ 及 $(\pm1,0,0)$ 达到最小值，最小值为零；而在 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 达到最大值，最大值为 $\frac{1}{4}(a-c)^2$.

例 3. 在平面上給一边長为 a, b, c 的三角形，在它上面作无数个定高 h 的錐体，求側面积最小的錐体.

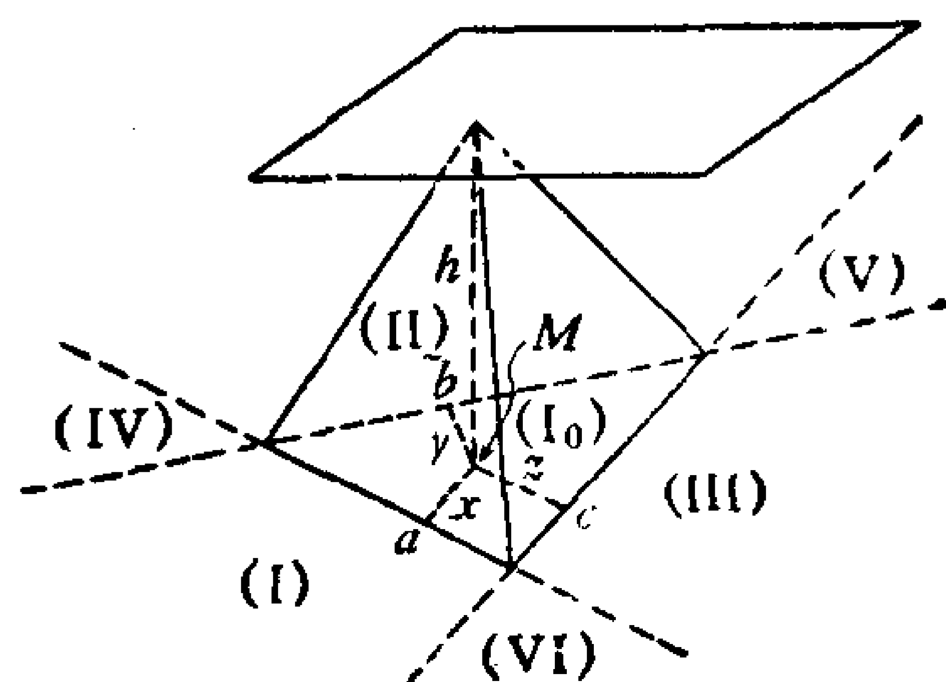


图 30

命錐体頂点在三角形所在平面的投影是 M, x, y, z 分别表示点 M 至三个边 a, b, c 的垂綫之長. 它們按图30所示的区域取下列符号：

	I_0	I	II	III	IV	V	VI
x	+	−	+	+	−	+	−
y	+	+	−	+	−	−	+
z	+	+	+	−	+	−	−

命三角形的面积是 P，則

$$ax + by + cz = 2P.$$

侧面积 S 为

$$S = \frac{a}{2}\sqrt{x^2 + h^2} + \frac{b}{2}\sqrt{y^2 + h^2} + \frac{c}{2}\sqrt{z^2 + h^2}.$$

以

$$z = \frac{2P - ax - by}{c}$$

代入 S，得

$$S = \frac{a}{2}\sqrt{x^2 + h^2} + \frac{b}{2}\sqrt{y^2 + h^2} + \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{2P - ax - by}{c}\right)^2 + h^2}.$$

由

$$2\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{cz}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot \frac{a}{c} = 0,$$

$$2\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{by}{\sqrt{y^2 + h^2}} - \frac{cz}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot \frac{b}{c} = 0$$

得

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + h^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + h^2}}.$$

由此得出 $x = y = z$，这点是三角形的內切圓的中心.

由于当 $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ 时，$S \to \infty$. 故最小值不可能在边界点上取得，因此这一点对应的錐体的侧面积最小.

例 4. 最小二乘法. 这是广泛用以修正观測的方法，确定 x, y 的数值，对于它們有 $n > 2$ 个綫性方程：

$$a_i x + b_i y = d_i, \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

其中 a_i, b_i, d_i 是由經驗方法得来的. 假定

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

从前两个方程解出的 x, y，一般并不能滿足其余的方程. 我們是要求 x, y 使

$$W = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y - d_i)^2$$

最小.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i x + b_i y - d_i) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = 2\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i x + b_i y - d_i) = 0.$$

用 Gauss 的記号，記 $[a, b] = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $[a, a] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, 等等. 則上式变为

$$[a, a]x + [a, b]y = [a, d],$$
$$[a, b]x + [b, b]y = [b, d].$$

由于

$$\begin{vmatrix} [a,a] & [a,b] \\ [a,b] & [b,b] \end{vmatrix} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}^2 \geqslant \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0$$

(此式讀者不难証明),故方程有解.

不难証明这一解确使W达到最小值.

§ 15. 隐函数求极値法

命

$$u = f(x, y, z).$$

我們現在研究在条件

$$g(x, y, z) = 0$$

的情况下,u的极大与极小.

为了明确起見,我們假定x, y是自变数,而z是由$g(x, y, z)=0$所定义的函数.

由u取极値的条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

再从条件$g(x, y, z)=0$出发算得

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

在这四个方程中消去$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

从这两个方程与$g(x, y, z)=0$解出x, y, z的数值,这就是找出可能的极大值与极小值的方法.

如法,由(1)可見

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}} (= -\lambda),$$

卽有λ使

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

如是我們也可以把x, y, z, λ都看成未知数,而从这三个方程与$g=0$中解出x, y, z, λ.这方法的优点是x, y, z都处于同等地位.

同时，我們也可从另一角度来看問題，即考虑函数

$$w = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

这函数的极值当然适合于

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = g(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

由于 $g(x, y, z) = 0$，所以也得出了 $f(x, y, z)$ 有条件的极值。

这一方法称为 Lagrange 乘子法。这不是另外一个方法，而是把 w 看成为四变数 λ，x，y，z 的函数，我們就可以运用固有的方法了。

例 1. 求点 (a, b) 到直綫

$$Ax + By + C = 0$$

的最短距离。

設 (a, b) 至直綫上动点 (x, y) 的距离为 r，则

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

作

$$w = (x - a)^2 + (y - b)^2 + \lambda(Ax + By + C).$$

由

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2(x - a) + \lambda A = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2(y - b) + \lambda B = 0$$

得

$$x = a - \frac{1}{2}\lambda A, \quad y = b - \frac{1}{2}\lambda B. \tag{2}$$

于是

$$\lambda = \frac{2(Aa + Bb + C)}{A^2 + B^2}. \tag{3}$$

由于 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时，$r \to \infty$，故最短距离是存在的。因此 (a, b) 至 (x, y) 的距离最短，此处 (x, y) 由 (2) 定义而 λ 由 (3) 定义。

例 2. 命 m，n、是給定的正数，求

$$f(x, y) = x^m y^n$$

的最大値，而 x 与 y 滿足：$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，$x + y = a$ $(a > 0)$。

对于 $f(x, y)$，求对数得

$$\varphi(x, y) = \log f(x, y) = m \log x + n \log y.$$

作函数

$$w = m \log x + n \log y + \lambda(x + y - a).$$

由

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{m}{x} + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{n}{y}+\lambda=0$$

得

$$x=-\frac{m}{\lambda},\quad y=-\frac{n}{\lambda}.$$

故

$$\lambda=-\frac{m+n}{a}.$$

于是

$$x=\frac{ma}{m+n},\quad y=\frac{na}{m+n}.$$

与例 1 类似的討論可知,这一点使 $\varphi(x, y)$[同样使 $f(x, y)$] 达到最大值.

§16. 坐 标 变 换

我們已經知道了两种坐标系——笛卡儿坐标与极坐标. 现在我們将这概念扩充一下,得所謂曲綫坐标系. 实質上,极坐标可以看成为由两族曲綫交織而成的:(i) 以原点为心的同心圓:

$$x^2+y^2=\rho^2,\quad \rho>0;$$

(ii) 通过原点的射綫:

$$y=x\operatorname{tg}\theta,\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

这两族曲綫有以下的性質:通过平面上的任一点(非原点)一定有一条且仅有一条族(i)的曲綫,也仅有一条族(ii)的曲綫. 对应于这两条曲綫,有二数值 ρ, θ. 这 ρ 和 θ 就称为点的极坐标.

如此就得出平面上的点和 (ρ, θ) 的一一对应关系(但原点例外).

笛卡儿坐标也是如此,是由两族直綫 $x=a$ 及 $y=b$ 交織而成的.

我們現在把这一概念加以扩充. 如果两組曲綫:

$$\varphi(x, y)=u,$$
$$\psi(x, y)=v,$$

都有这样的性質,对应平面上的一点 (x, y), 两組曲綫各有唯一的一条通过 (x, y). 这样一来,两个曲綫族就成为一个曲綫坐标系 (u, v), 称为 (x, y) 的曲綫坐标.

如果在平面上有些例外部分,我們就說是对不例外部分的曲綫坐标系.

除常見的笛卡儿坐标与极坐标之外,我們还有下面的几种坐标.

例 1(橢圓坐标系). 命 $e_1>e_2$. 对应于 x, y (x 与 y 都非零),我們从

$$\frac{x^2}{q-e_1}+\frac{y^2}{q-e_2}=1 \tag{1}$$

可以得出两个根 q_1, q_2 $(q_1>e_1>q_2>e_2)$. 这 q_1, q_2 也就成一坐标系. 現在来求出曲綫族.

当 $q = q_1$ 是常数时，(1) 表示一个椭圆；当 $q = q_2$ 是常数时，(1) 表示一个双曲綫．换言之，一个曲綫族是共焦点的椭圆族，而另一个是共焦点的双曲綫族．通过平面上的一点，有唯一的一个椭圆[属于 (1) 的]，也有唯一的一个双曲綫．

例 2．取

$$x = \cosh\lambda_1 \cos\lambda_2, \quad y = \sinh\lambda_1 \sin\lambda_2.$$

当 λ_1 是常数时，有椭圆

$$\frac{x^2}{\cosh^2\lambda_1} + \frac{y^2}{\sinh^2\lambda_1} = 1.$$

当 λ_2 是常数时，有双曲綫

$$\frac{x^2}{\cos^2\lambda_2} - \frac{y^2}{\sin^2\lambda_2} = 1.$$

在例 1 中取 $e_1 = 1$, $e_2 = 0$，則得

$$\frac{x^2}{q-1} + \frac{y^2}{q} = 1.$$

它有两个根 q_1, q_2，适合于 $q_1 > 1 > q_2 > 0$．我們取 $q = \cosh^2\lambda_1$ 及 $q_2 = \cos^2\lambda_2$，这完全适合于要求了．因此，如此得出的坐标系也就是例 1 的椭圆坐标系．

例 3．取

$$x = \frac{1}{2}[q_1^2 - q_2^2], \quad y = q_1 q_2.$$

当 $q_1 =$ 常数，得出一族拋物綫，以原点为焦点，开向左方．而 $q_2 =$ 常数，也得一族以原点为焦点，开向右方的拋物綫．

我們現在介紹換变数的方法．如果

$$F(x, y)$$

是 x, y 的函数，換了变数

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

之后，得函数

$$G(u, v) = F(g, h).$$

現在有

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

由此得出的行列式

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

称为 Jacobian 或函数行列式．

在 (x, y) 平面上我們有长度的微分．經过变换之后就得到

$$dx^2 + dy^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}du + \frac{\partial h}{\partial v}dv\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2\right]du^2 + 2\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}\right)du\,dv +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right]dv^2.$$

这便是在曲綫坐标中的长度元素．

例 1．极坐标．

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi),$$

則

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

例 2．考虑变换

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

由于

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta},$$

故将 x 軸与 y 軸分别与 ξ 軸及 η 軸重合，即可知对应点在同一射綫上，且对应点与原点的距离的平方的乘积为 1．

这一变换是可逆的，逆变换是

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

故称这变换为反演．

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2}.$$

§ 17．三維空間的几个坐标系

与平面上曲綫坐标系相类似，現在把这一概念扩充到空間去．設有三組曲面：

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, z), \\ v &= \psi(x, y, z), \\ w &= \chi(x, y, z), \end{aligned} \tag{1}$$

都有这样的性質，对于空間中的一点 (x, y, z)，有唯一的 u 使

$$u = \varphi(x, y, z),$$

也就是說，有唯一的一张曲面通过 (x, y, z)；亦有唯一的 v 及 w 使

$$v = \psi(x, y, z), \quad w = \chi(x, y, z).$$

这样一来，三組曲面族 (1) 就构成一个曲面坐标系 (u, v, w)． 称为 (x, y, z) 的曲面坐标．

如果空間中有些例外部分，我們就說，这是对不例外部分的曲面坐标。

常用的笛卡儿坐标就是三族平面 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 交織而成的。

如果 $F(x, y, z)$ 是 x, y, z 的函数，换了变数

$$x=g(u, v, w), \quad y=h(u, v, w), \quad z=k(u, v, w)$$

之后得函数

$$G(u, v, w)=F(g, h, k),$$

故

$$\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial G}{\partial w}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}.$$

因此得出行列式

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

称为 Jacobian 或函数行列式。

例 1. 球坐标(或称空間极坐标)。它与笛卡儿坐标的关系是

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=r\cos\theta,$$

其中

$$r\geqslant 0, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \quad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

r, φ, θ 的几何意义是：r 是联結原点与已知点 $M(x, y, z)$ 的矢量的长度、θ 是这一矢量与 OZ 軸的交角，φ 是 OM 在 xy 平面上的投影 OP 与 x 軸的交角。

这个变换不是一对一的。 (r, φ, θ) 空間中的平面 $r=0$ 与原点 $x=y=z=0$ 相

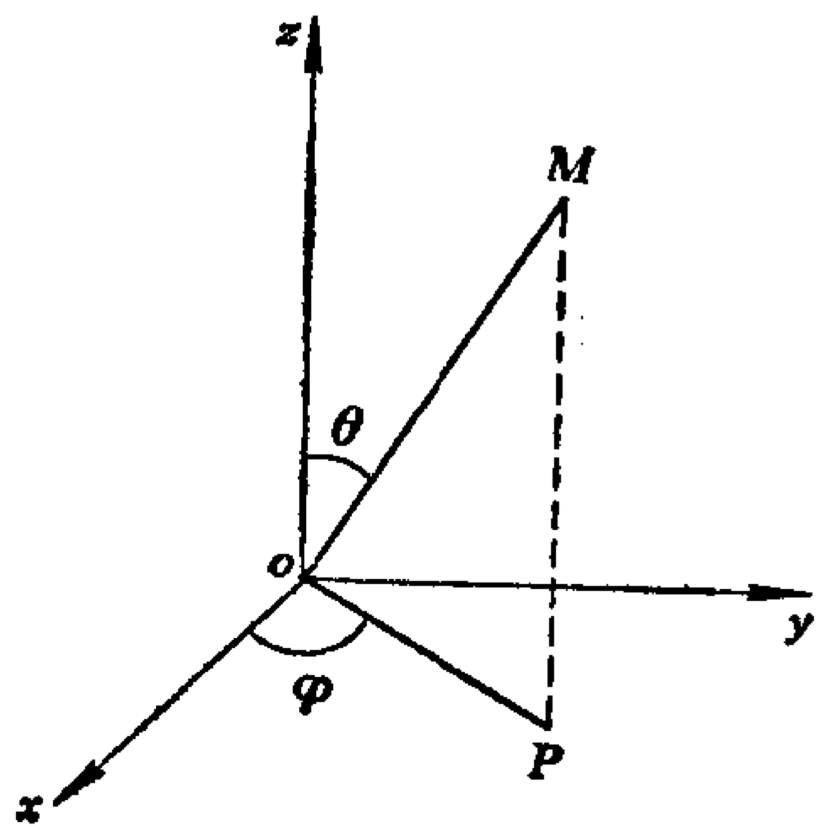


图 31

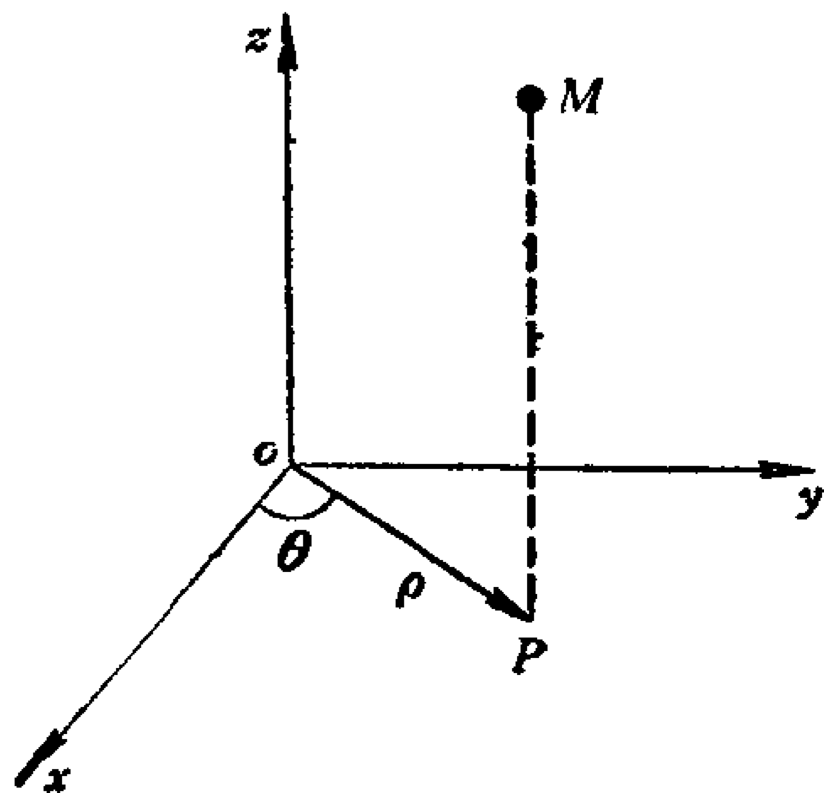


图 32

对应. 而直綫 $\theta=0$ (或 π), $r=$ 常数 $\neq 0$, 则被映于一点 $x=y=0$, $z=r$ 或 $-r$. 除此而外, 则是一对一的对应了.

坐标曲面形成三族:

(i) $r=$ 常数, 表示中心在原点的同心球面;

(ii) $\theta=$ 常数, 表示以 z 軸为軸的圓錐面;

(iii) $\varphi=$ 常数, 表示通过 z 軸的半平面.

这一变换的 Jacobian 为

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\theta.$$

例 2. 圓柱坐标. 这是 x, y 平面上的极坐标与变量 z 相联合而成的:

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta,$$
$$z=z,$$

其中

$$\rho\geqslant 0,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,\quad -\infty<z<\infty.$$

除 (ρ,θ,z) 空間的直綫 $\rho=0$, $z=c$ (常数) 被映射到一个点 $x=y=0$, $z=c$ 之外, 其余的点都是一一对应的.

坐标曲面形成三族:

(i) $\rho=$ 常数, 表示母綫平行于 z 軸的圓柱面, 准綫则是 xy 平面上以原点为中心, ρ 为半径的圓周;

(ii) $\theta=$ 常数, 则是过 z 軸的半平面;

(iii) $z=$ 常数, 表示平行于 xy 平面的平面.

变換的 Jacobian 为

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$$

例 3. 椭球坐标. 考虑共焦点且共軸的二次曲面族

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-h^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-k^2}=1\quad(0<h<k).\tag{2}$$

固定一点 (x,y,z), 此点不在坐标平面上. 将上式看成 λ^2 的方程时, 有三正根 λ_1^2, λ_2^2 与 λ_3^2, 滿足

$$\lambda_1>k>\lambda_2>h>\lambda_3>0.$$

又由根与系数的关系可知

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=x^2+y^2+z^2+h^2+k^2,$$
$$\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2=(h^2+k^2)x^2+k^2y^2+h^2z^2+h^2k^2,$$
$$\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2=h^2k^2x^2.$$

于是得出

$$x = \pm \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{hk},$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 - h^2)(\lambda_2^2 - h^2)(h^2 - \lambda_3^2)}}{h\sqrt{k^2 - h^2}},$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 - k^2)(k^2 - \lambda_2^2)(k^2 - \lambda_3^2)}}{k\sqrt{k^2 - h^2}}.$$

如果限制 x, y, z 在第一卦限,则这些式子都只取正号,数 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 就是第一卦限内点的椭球坐标.

三坐标曲面族是: 当 $\lambda =$ 常数 $> k$ 时,(2) 表示椭球面;当 $k > \lambda > h$ 时,(2) 表示单叶双曲面;当 $0 < \lambda < h$ 时,(2) 是双叶双曲面.

变换的 Jacobian 是

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)}{\sqrt{(\lambda_1^2 - h^2)(\lambda_1^2 - k^2)(\lambda_2^2 - h^2)(k^2 - \lambda_2^2)(h^2 - \lambda_3^2)(k^2 - \lambda_3^2)}}.$$

第十三章　带变数的貫，級数及积分

§1. 一致收斂貫

命D代表m維空間的一个域，我們所討論的函数乃指在D上变化的m个变数$x_1, \cdots, x_m$的函数. 为簡单計，我們就用x来代表$x_1, \cdots, x_m$，換一句話說，$f(x)$就是指$x_1, \cdots, x_m$的函数，且这m个变数都在D上变化，函数值可能是实数也可能是复数.

如果对任一$x \in D$，函数貫

$$a_n(x) \quad n = 1,2,3,\cdots$$

都收斂，这个貫就称为D上的收斂貫，以$[a_n(x)]$表之. 它的极限也是在D上定义的一个函数$a(x)$.

一般講来，对D中的一点x，当我們給了一个$\varepsilon > 0$，有一正数N存在，使当$n > N$时，

$$|a_n(x) - a(x)| < \varepsilon.$$

这N不但和ε有关而且和点x有关. 換言之，当x变化时，我們所选的N也变化.

我們現在討論一个十分重要的情况，就是N并不与点x有关，而仅与ε有关的情况，这一概念称为一致收斂. 定义如下:

定义. 在D中定义的一个函数貫

$$a_n(x) \quad n = 1,2,3,\cdots$$

称为一致收斂于$a(x)$，如果它适合以下的条件：任与一$\varepsilon > 0$，我們可以选得N仅与ε有关而不与x有关，使当$n > N$时，

$$|a_n(x) - a(x)| < \varepsilon.$$

由定义立刻看出，函数貫$[a_n(x)]$一致收斂于$a(x)$的充要条件是

$$\sup_x |a_n(x) - a(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

定理 1 (Cauchy 判别条件). 一个函数貫

$$a_n(x) \quad n = 1,2,3,\cdots$$

一致收斂的必要且充分条件是：任給一个$\varepsilon > 0$，可以找到仅依賴于ε而不依賴于x的N，使当$m, n > N$时，

$$|a_m(x) - a_n(x)| < \varepsilon.$$

証. 必要性. 如果$a_n(x)$一致收斂于$a(x)$，我們有N，使当$m, n > N$时，

$$|a_m(x) - a(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_n(x) - a(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以

$$|a_m(x)-a_n(x)|\leqslant|a_m(x)-a(x)|+|a_n-a(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性. 由关于收斂性的 Cauchy 判别条件知道,对任一 x, $a_n(x)$ 收斂,假設它的极限是函数 $a(x)$.

任与 $\varepsilon>0$, 我們有 N 存在,使

$$|a_m(x)-a_n(x)|<\varepsilon\quad(m,n>N).$$

固定 m, 命 $n\to\infty$, 則因 $a_n(x)\to a(x)$, 所以当 $m>N$ 时,

$$|a_m(x)-a(x)|<\varepsilon.$$

卽得一致收斂性.

定理 2. 連續函数的一致收斂貫的极限也是連續函数.

証. 任給 $\varepsilon>0$, 我們有 N 存在,使

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon\quad(n>N),$$

这 N 与 x 无关. 考虑

$$|a(x+h)-a(x)|\leqslant|a_n(x+h)-a(x+h)|+|a_n(x)-a(x)|$$
$$+|a_n(x+h)-a_n(x)|<2\varepsilon+|a_n(x+h)-a_n(x)|.$$

由于 $a_n(x)$ 連續,故对已給的 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$ 存在,使当 $|h|<\delta$ 时,

$$|a_n(x+h)-a_n(x)|<\varepsilon.$$

因此

$$|a(x+h)-a(x)|<3\varepsilon.$$

(注意,本証明虽然是一个变数的形式,但是却具 m 个变数的实質).

例 1. 函数貫

$$a_n(x)=\frac{1}{1+nx},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ n=1,2,\cdots$$

是一个收斂貫,它的极限是

$$a(x)=\begin{cases}0, & \text{如果}\ 0<x\leqslant 1,\\ 1, & \text{如果}\ x=0.\end{cases}$$

由于 $a(x)$ 不連續,所以这个貫在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 中不一致收斂.

例 2. 函数貫

$$a_n(x)=x\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}},\quad x\geqslant 0,\quad n=1,2,\cdots$$

也是一个收斂貫,它的极限是

$$a(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{-x}}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由于 $a(x)$ 不連續,所以 $a_n(x)$ 不一致收斂.

例 3. 函数貫

$$a_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad n=1,2,\cdots$$

的极限是 $a(x)=0$, 虽然 $a(x)$ 連續,但 $[a_n(x)]$ 仍不一致收斂. 原因是

$$a_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2},$$

乜并不趨于 0． 由此可見，不一致收斂的連續函数貫的极限也可能連續，也就是說，极限函数連續只是連續函数貫为一致收斂的必要条件，但并非充分条件。

定理 3. 如果对 D 上一点 a，有

$$\lim_{x\to a} a_n(x)=c_n,$$

并且 $a_n(x)$ 一致收斂于 $a(x)$，則 c_n 的极限 c 存在，且

$$\lim_{x\to a} a(x)=\lim_{n\to\infty} c_n=c.$$

証. 由定义，对任一 $\varepsilon>0$，有 N 存在，使

$$|a_n(x)-a_m(x)|<\varepsilon,\quad n,m>N,$$

这 N 与 x 无关. 命 $x\to a$，則得

$$|c_n-c_m|<\varepsilon.$$

因此 c_n 有极限 c 存在.

由不等式

$$|a(x)-c|\leqslant|a_n(x)-c_n|+|a(x)-a_n(x)|+|c_n-c|$$

出发，我們可以取 N，使当 $n>N$ 时，

$$|c_n-c|<\varepsilon,\quad |a(x)-a_n(x)|<\varepsilon.$$

又可以取 $\delta>0$，使当 $|x-a|<\delta$ 时，

$$|a_n(x)-c_n|<\varepsilon.$$

故当 $|x-a|<\delta$ 时，

$$|a(x)-c|<3\varepsilon.$$

即得定理.

定理也可以改述为：等式

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} a_n(x)$$

当 $a_n(x)$ 一致收斂时成立. 注意非一致收斂的情况，两个极限的求取不能任意互换.

§ 2. 貫的微分积分

定理 1. 如果在 $[a,b]$ 上 $a_n(x)$ 連續，而且一致收斂于 $a(x)$，則

$$\int_a^b a(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx,$$

也就是

$$\int_a^b(\lim_{n\to\infty} a_n(x))dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx.$$

証. 給了任一 $\varepsilon>0$，有 N 存在，使当 $n>N$ 时，

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon.$$

因此

$$\left|\int_a^b a(x)dx - \int_a^b a_n(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |a(x) - a_n(x)|dx < \varepsilon(b-a).$$

故有定理.

例 1. 不一致收斂,有时結果不眞,如

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2n^2x\cdot e^{-n^2x^2}dx = \lim_{n\to\infty}(1-e^{-n^2}) = 1,$$

而

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty}(2n^2xe^{-n^2x^2})dx = 0.$$

例 2. 不一致收斂,結果有时也正确,如

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}dx.$$

定理 2. 如果 $a_n(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上可积,而且 $a_n(x)$ 一致收斂于 $a(x)$,則 $a(x)$ 也可积,而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx = \int_a^b a(x)dx.$$

証. 我們来討論函数 $a(x)$ 的可积性.

由于一致收斂性,給与 $\varepsilon > 0$, 有N存在,使当 $n \geqslant N$ 时,

$$|a_n(x) - a(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

即 ,

$$a_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < a(x) < a_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $[a,b]$ 的任意部分 $[\alpha,\beta]$,并且命m与M是函数 $a_n(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的上确界与下确界,而 $\omega = M - m$ 是它的振幅;又用 Ω 表示函数 $a(x)$ 的振幅,因在 $[\alpha, \beta]$ 上,

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < a(x) < M + \frac{\varepsilon}{2},$$

所以

$$\Omega \leqslant \omega + \varepsilon.$$

把区間 $[a, b]$ 分成部分区間 $[x_i, x_{i+1}]$, 在这区間內, $a_n(x)$, $a(x)$ 的振幅各記以 ω_i, Ω_i, 則 $\Omega_i \leqslant \omega_i + \varepsilon$, 并且

$$\sum \Omega_i \Delta x_i \leqslant \sum \omega_i \Delta x_i + \varepsilon(b-a).$$

因为 $\varepsilon(b-a)$ 可以任意小, 而当 $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ 时 $\sum \omega_i \Delta x_i$ 趋于 0, 所以左边也趋于 0 ,于是 $a(x)$ 可积. 定理后半部分的証明与定理 1 完全相同.

定理 3. 假定 $a_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 而微商貫 $[a_n'(x)]$ 在整个区間上連續并且一致收斂. 如果已知函数貫 $[a_n(x)]$ 在 a 点收斂, 則 $[a_n(x)]$ 在整个区間上一致收斂,并且极限 $a(x)$ 是可微的,且

$$a'(x) = \lim_{n\to\infty} a_n'(x),$$

也就是

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}a_n(x).$$

証. 我們先証明貫 $[a_n(x)]$ 在区間 $[a, b]$ 上一致收斂. 由

$$a_n(x) = a_n(a) + \int_a^x a_n'(x)dx$$

得

$$|a_m(x) - a_n(x)| \leqslant |a_m(a) - a_n(a)| + \int_a^x |a_m'(x) - a_n'(x)|dx.$$

任給 $\varepsilon>0$, 因 $[a_n'(x)]$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂,故存在 N_1 使当 $m, n>N_1$ 时

$$|a_m'(x) - a_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

由貫 $[a_n(x)]$ 在 $x = a$ 的收斂性,有 N_2 使当 $m,n>N_2$ 时

$$|a_m(a) - a_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

故当 $m, n>N = \max(N_1, N_2)$ 时

$$|a_m(x) - a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x-a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此貫 $[a_n(x)]$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂.

命

$$a^*(x) = \lim_{n\to\infty} a_n'(x).$$

由定理 2, 可知

$$\int_a^x a^*(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x a_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty}[a_n(x) - a_n(a)] = a(x) - a(a).$$

因为被积函数 $a^*(x)$ 連續,左边积分的微商等于 $a^*(x)$, 它和 $a(x)$ 的微商相等.

§3. 囿 收 斂

对于一致收斂的連續函数貫, 我們有积分号下取极限的定理(§2. 定理1). 如果在 $[a, b]$ 間有些例外的点, 这些例外点的来源或出之于不一致收斂,或出于瑕积分,我們也有一些結果. 先引进

定义. 如果函数貫 $[a_n(x)]$ 在区間 $[a, b]$ 上处处收斂, 且有一与 n, x 都无关的常数 M, 使

$$|a_n(x)| \leqslant M,$$

則称 $a_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上囿收斂.

定理 1. 如果 $[a, b]$ 中有一点 c, 对任意 $\delta > 0$, $a_n(x)$ 在 $[a, c-\delta]$, $[c+\delta, b]$ 上一致收斂,又若 $a_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上囿收斂,則仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} a_n(x)dx.$$

証. 命 $a(x) = \lim a_n(x)$, 由

$$\left|\int_a^b [a_n(x) - a(x)]\cdot dx\right| \leqslant \left|\int_a^{c-\delta} [a_n(x) - a(x)]dx\right| + \left|\int_{c+\delta}^b [a_n(x) - a(x)]dx\right|$$

$$+\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta}a_n(x)dx\right|+\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta}a(x)dx\right|\leqslant\left|\int_a^{c-\delta}\right|+\left|\int_{c+\delta}^{b}\right|+4\delta M,$$

对任与的 $\varepsilon>0$，可先取 δ，使 $4\delta M<\varepsilon$. 又在 δ 固定之后，可取 n 充分大，使其前二項也都小于 ε. 因而得出本定理.

这定理中的例外点，可以推广为不止一点，而有有限个例外点的情况. 又此定理可以推广为

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)\varphi(x)dx=\int_a^b[\lim_{n\to\infty}a_n(x)]\varphi(x)dx,$$

只須假定

$$\int_a^b|\varphi(x)|dx<\infty.$$

以后将述及 Lebesgue 积分，在考虑 Lebesgue 积分时，这定理将以更完整的形式出現，如 Arzéla 定理等.

例 1. 函数貫

$$a_n(x)=\frac{1}{1+nx},\quad a_n(x)=nx(1-x)^n,\quad(0<x<1),\qquad n=1,2,\cdots$$

都是囿收斂.

一个更重要的例子是

例 2. 函数貫

$$a_n(x)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin mx}{m},\quad n=1,2,\cdots$$

我們将証明它在任何区間上都囿收斂. 因为 $a_n(x)$ 为奇函数，且有周期 2π，所以只須証明它在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上囿收斂便已足够.

因为

$$\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t},$$

所以

$$a_n(x)=\int_0^x(\cos t+\cdots+\cos nt)dt=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt=$$

$$=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt+\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt-\frac{1}{2}x=$$

$$=\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin u}{u}du+\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt-\frac{1}{2}x.\qquad(1)$$

因为 $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$ 收斂（見 § 10.10 例 1），所以 $\int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{u} du$ 有界．又因 $\sin u \leqslant u$，所以

$$\left|\int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt\right| \leqslant \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right) dt$$

也有界．所以存在一个与 n 与 x 都无关的常数 M、使

$$|a_n(x)| \leqslant M.$$

下面我們再証明

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x \quad (0 < x \leqslant \pi). \tag{2}$$

极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$$

存在．又

$$\int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt = -\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{x}\right) \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt,$$

易証上式最后一个积分有界，故当 $n\to\infty$ 时，最后一項趋于 0，而得

$$\int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right) \sin\left(n+\frac{1}{2}t\right) dt \to 0.$$

于是由 (1) 式得出

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du - \frac{1}{2}x \quad (0 < x \leqslant \pi),$$

特别当 $x = \pi$ 时，因为 $a_n(\pi) = 0$，所以得到

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2}\pi. \tag{3}$$

(2) 式得証，同时我們也得到了 Dirichlet 积分 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 的值．

又因极限函数

$$a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x & (0 < x < 2\pi) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

在 0 处不連續，所以 $a_n(x)$ 在任何包含 $2m\pi$ 的区間中不一致收斂；但它是有界收斂的．

再研究瑕积分的情况．

定理 2. 如果 $a_n(x)$ 非負，且对固定的 x，它是 n 的非減函数．又对任一 $c(< b)$，

常有

$$\int_a^c (\lim_{n\to\infty} a_n(x))dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^c a_n(x)dx,$$

則在下式有一方存在时,有

$$\int_a^b (\lim_{n\to\infty} a_n(x))dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx.$$

(注意,这里的 b 可为有限,也可以是 ∞.)

証. 假定右边收斂,命

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx = S.$$

由 $a_n(x)$ 的非負性可知,对任一 $c(<b)$,

$$\int_a^c \lim_{n\to\infty} a_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^c a_n(x)dx \leqslant S.$$

所以

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} a_n(x)dx = I$$

存在,即左边也收斂,而且

$$I \leqslant S.$$

另一方面,

$$\int_a^b a_N(x)dx \leqslant \int_a^b (\lim a_n(x))dx = I,$$

命 $N\to\infty$, 可知 $S\leqslant I$. 所以 $S=I$.

同法可从左边出发来証明等式.

§4. 級数的一致收斂性

現在考虑級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{1}$$

命

$$S_n(x) = \sum_{m=1}^{n} u_m(x),$$

于是級数的問題就变为貫 $S_n(x)$ 的問題, 而从貫的性质立刻可以推出級数的性质. x 仍然在 m 維的域 D 中变化.

定义. 如果貫 $S_n(x)$ 一致收斂于 $S(x)$, 則称級数一致收斂于 $S(x)$.

定理 1. 級数 (1) 一致收斂的必要且充分条件是:給了任一 $\varepsilon>0$,有不依于 x 的 N 存在,使当 $n>N$ 时,

$$|S_{n+l}-S_n|<\varepsilon, \quad l>0.$$

例. 設冪級数 $\sum a_n x^n$ 的收斂半径为 R, 則对任何 $r(<R)$, 冪級数在 $|x|\leqslant r$ 中一致收斂. 命 r' 表适合 $r<r'<R$ 的任一实数,則因 $\sum a_n r'^n$ 收斂, 故必有正数 K, 使

$|a_n r'^n| < K$ (对所有 n 都成立),于是在 $|x| \leqslant r$ 中,

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+l} a_m x^m\right| \leqslant \sum_{m=n+1}^{n+l} |a_n r'^m| \cdot \left|\frac{x}{r'}\right|^m \leqslant K \sum_{m=n+1}^{n+l} \left(\frac{r}{r'}\right)^m < K \frac{\left(\frac{r}{r'}\right)^{n+1}}{1-\frac{r}{r'}},$$

由此不难获得結果.

定理 2. 如果对 D 上一点 a,有

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = c_n,$$

又 $\Sigma u_n(x)$ 在 D 上一致收斂,则

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

且这級数收斂.

定理 3. 連續函数的一致收斂級数的和也是連續函数.

以下二定理虽然是一个变数的形式,但实质上不难推广到多元函数的情形.

定理 4. 可积函数的一致收斂級数可以逐項积分,即

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

定理 5. 如果微分后的級数一致收斂, 则級数可以逐項微分, 更具体地說, 如果 $\sum u_n(x)$ 收斂, $u_n'(x)$ 連續, $\sum u_n'(x)$ 一致收斂,则

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

故若命 R 为冪級数 $\sum a_n x^n$ 的收斂半径,则在 $|x| < R$ 中, $f(x) = \sum a_n x^n$ 可逐項积分与逐項微分.

我們还有

定理 6. 如果对任何 $\delta > 0$, $\sum u_n(x)$ 在 $[a+\delta, b]$ 上一致收斂, 并且 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上囿收斂. 又設

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx < \infty,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \varphi(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \varphi(x) dx.$$

定理 7. 設 $u_n(x) \geqslant 0$, 且对任一 $c(< b)$, 常有

$$\int_a^c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^c u_n(x) dx,$$

则在下式有一方为收斂时,有

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \tag{2}$$

(b 可以为有限也可以为 ∞).

若 $u_n(x)$ 可正可負,在将收斂的条件換成絕对收斂后,定理仍然成立. 詳細言之,我們有

定理 8. 若对任一 $c(<b)$, 常有

$$\int_a^c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^c u_n(x)dx,$$

$$\int_a^c \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^c |u_n(x)|dx,$$

則在

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|dx \quad 与 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |u_n(x)|dx \tag{3}$$

有一为收斂时,等式 (2) 仍成立.

証. 由定理 7 知道,(3) 中任一式的收斂保証另一式也收斂,并且两者相等. 所以这两种假定是等价的. 于是因为

$$0 \leqslant |u_n(x)| \pm u_n(x) \leqslant 2|u_n(x)|,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [|u_n(x)| \pm u_n(x)]dx$$

也收斂. 再由定理的假定及定理 7 得到

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} [|u_n(x)| \pm u_n(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [|u_n(x)| \pm u_n(x)]dx,$$

由此导得結果.

如果 $u_n(x)$ 是复函数,如

$$u_n(x) = \alpha_n(x) + i\beta_n(x),$$

通过討論 $|u_n(x)| \pm \alpha_n(x)$, $|u_n(x)| \pm \beta_n(x)$, 这四个函数都是非負的, 我們也能得到类似的定理.

例 1. 試将 $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx$ 展成級数形式.

級数

$$\frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{x^3}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^{m-3/2}}{m!}$$

在 $[0, 1]$ 中一致收斂,故可逐項积分得

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^1 x^{m-3/2}dx = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!(2m-1)}.$$

例 2. 試将 $\int_0^1 e^x \log x\, dx$ 展成級数形式.

級数 $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收斂,又

$$\int_0^1 |\log x| dx = 1 < \infty,$$

故由定理 6 得到

$$\int_0^1 e^x \log x\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \log x\, dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!(n+1)}.$$

例 3. 求証

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x} dx = 1.$$

我們有級数

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

这个級数在 1 的邻近并不一致收斂，甚至也不囿收斂. 但因 $\frac{x^n}{n} \geqslant 0$，并且

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x} dx < \infty,$$

又对任何 $c < 1$，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在 $[0, c]$ 中一致收斂，所以

$$\int_0^c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^c \frac{x^n}{n} dx.$$

于是由定理 7 得到

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

例 4. 命 $u_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}(0 < a < b)$，則

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

但因函数 $\frac{u}{e^u - 1}$ 当 $u > 0$ 时是严格单調下降的，故

$$\int_0^{\infty} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{a}{e^{ax} - 1} - \frac{b}{e^{bx} - 1}\right) dx > 0,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u_n(x) dx \neq \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx.$$

其所以不能交换，是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |u_n(x)| dx$$

发散. 事实上，$u_n(x)$ 在 $x < \dfrac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}$ 时为負，在 $x > \dfrac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}$ 时为正，于是

$$\int_0^\infty |u_n(x)|\,dx = \left(\int_0^{\frac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}} - \int_{\frac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}}^\infty\right)[be^{-nbx} - ae^{-nax}]\,dx = \frac{2}{n}\left(e^{-\frac{a\log\frac{b}{a}}{b-a}} - e^{-\frac{b\log\frac{b}{a}}{b-a}}\right).$$

所以 $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |u_n(x)|\,dx$ 发散.

§5. 一致收斂的一些判別条件

現在再介紹几个判別条件.

定理 1 (Weierstrass). 命 $\sum a_n$ 是一正項的收斂級数，如果对充分大的 n，有

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad x \in D,$$

則級数 $\sum u_n(x)$ 一致收斂.

証. 由比較原則，对任一 $x \in D$，級数

$$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$$

是收斂的，命其和为 $s(x)$.

由

$$|s(x) - s_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots| \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots,$$

可以获得定理.

我們还可以推广.

定理 2. 如果 $\sum v_n(x)$ 一致收斂，并且

$$|u_n(x)| \leqslant v_n(x) \quad x \in D,$$

則 $\sum u_n(x)$ 也一致收斂.

立刻可以推出

定理 3. 如果有一与 x 无关的常数 $r\,(<1)$，使对充分大的 n，

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < r,$$

則級数

$$\sum u_n(x)$$

一致收斂.

定理 4. 如果有一与 x 无关的常数 $r\,(<1)$，使对充分大的 n，

$$|u_n(x)|^{\frac{1}{n}} < r,$$

則級数 $\sum u_n(x)$ 一致收斂.

例 1. 三角級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

是一致收斂的.

例 2. 命 $1 < a < b$, Dirichlet 級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad s = \sigma + it,$$

在区間 $a \leqslant \sigma \leqslant b$ 中一致收斂.

这是有名的 Riemann ζ 函数.

例 3. 級数

$$\{1 - (1 - x^2)\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1 - x^2)^n$$

在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 中一致收斂.

§6. 一致收斂的 Abel 及 Dirichlet 判別法

任何一个检驗收斂性的判別法，只要它的条件与区域 D 中的 x 无关，都能成为检驗一致收斂性的判別法. 例如，与定理 4.4.2 及定理 4.4.3 对应的是

定理 1 (Abel 判別法). 假定

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

在 D 中一致收斂，又設对每一 x, $a_n(x)$ 成一单調貫，且有一与 n, x 无关的常数 K，使

$$|a_n(x)| \leqslant K,$$

則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

在 D 中一致收斂.

定理 2 (Dirichlet 判別法). 如果 $\Sigma b_n(x)$ 的部分和

$$|B_n(x)| \leqslant M,$$

而 M 与 n, x 无关，又对任一 x, $a_n(x)$ 单調一致地趋于 0，則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

也一致收斂.

这两定理的証明与定理 4.4.2 及定理 4.4.3 完全类似. 因为沒有困难，我們把它留給讀者自証.

例 1. 命 a_n 是单調趋向于 0 的貫. 在任何一个不包有 $2k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的閉区間内，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx}$$

都一致收斂.

理由如下:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|},$$

在所討論的区間內, $\sin\frac{1}{2}x\neq 0$, 所以得出一个与 n, x 都无关的上界.

它的一个重要特例是:級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

在任何一个不包含 $2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的閉区間上都一致收斂. 关于这个級数, § 3 中已經証明,这級数在整个直綫上閤收斂,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x\quad(0<x<2\pi).$$

例 2. 若 a_n 是递減的正数貫,級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

在任何区間上都一致收斂的充要条件是: $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 也卽 $na_n\to 0$.

証. 1) 必要性. 命 $p\geqslant 4$, 考虑 $x=\frac{\pi}{2p}$ 及 $n=\left[\frac{1}{2}p+1\right]$[1], 我們有

$$a_n\sin nx+a_{n+1}\sin(n+1)x+\cdots+a_p\sin px$$

$$>a_p(\sin nx+\cdots+\sin px)>a_p\left(\frac{1}{2}p-1\right)\sin\frac{1}{4}\pi>\frac{\sin\frac{1}{4}\pi}{4}pa_p$$

$\left(\text{因为现在有 }\frac{\pi}{2}>mx>\frac{1}{4}\pi\right)$. 由于所考虑的級数在一包含原点的区間中一致收斂,故当 $p\to\infty$ 时,上面不等式的左方趋向于零,因此 $pa_p\to 0$, 也卽 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) 充分性. 由于周期性及奇函数性, 不妨假定 $0\leqslant x\leqslant\pi$. 命 $\mu_n=\max\limits_{m\geqslant n}(ma_m)$, 則由假定 $\mu_n\to 0$. 又命

$$S_{n,m}=a_n\sin nx+\cdots+a_m\sin mx,$$

我們将証明

$$|S_{n,m}|\leqslant(\pi+1)\mu_n.$$

由此不难得出結果.

若 $x\geqslant\frac{\pi}{n}$, 由于

---

1) 此处 $[x]$ 表 x 的整数部分.

$$|\sin nx + \cdots + \sin rx| = \left|\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(r+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x} \leqslant \frac{\pi}{x}$$

$\left(因为在 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi 中, \frac{\theta}{\sin\theta} \leqslant \frac{1}{2}\pi\right)$,故由 Abel 引理(第十章 § 6)可知,

$$|S_{n,m}| \leqslant \frac{a_n\pi}{x} < na_n \leqslant \mu_n.$$

又若 $x \leqslant \frac{\pi}{m}$, 因为 $\sin\theta \leqslant \theta$, 故有

$$|S_{n,m}| \leqslant a_n nx + \cdots + a_m mx \leqslant m\mu_n x \leqslant \pi\mu_n.$$

今若 $\frac{\pi}{m} < x < \frac{\pi}{n}$,我們将这两种方法結合起来用. 我們有

$$|S_{n,m}| \leqslant |S_{n,\left[\frac{\pi}{x}\right]}| + |S_{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1,m}|.$$

对于 $S_{n,\left[\frac{\pi}{x}\right]}$, 因为 $x \leqslant \pi\Big/\left[\frac{\pi}{x}\right]$,所以用第二种方法得到

$$|S_{n,\left[\frac{\pi}{x}\right]}| \leqslant \pi\mu_n;$$

又因 $x > \frac{\pi}{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1}$, 所以用第一种方法得到

$$|S_{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1,m}| \leqslant \mu_{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1} \leqslant \mu_n,$$

所以又得到

$$|S_{n,m}| \leqslant (\pi+1)\mu_n.$$

而得到所要証明的結果.

§ 7. Abel 定理及 Tauber 定理

設冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收斂半径等于 1,則在区間 $|x| \leqslant \rho(<1)$ 中,冪級数一致收斂,今若級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收斂, 問冪級数的一致收斂区間能否向右伸展一直到 1. 回答是肯定的,这就是有名的 Abel 定理.

定理 1 (Abel). 設級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收斂,則冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中一致收斂,且有

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

証. 在上节的定理 1 中,取 $a_n(x) = x^n$, $b_n(x) = a_n$, 立得定理的前半部分. 定理的后半部分由 § 4 定理 2 导出.

Abel 定理告訴我們,如果 (1) 式右方收斂,則左方的极限也存在,并且与它相等. 它的逆定理未必眞确,即若 (1) 式左方存在,右方未必与它相等,甚至还不一定收斂. 例如

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},$$

当 $x \to 1$ 时, $f(x) \to \frac{1}{2}$, 但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 不收斂.

如果我們給系数 a_n 的阶以一定的限制,逆定理便有可能成立. 我們有

定理 2 (Tauber). 若 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$,且当 $x \to 1$ 时, (1)式左方的极限存在,則 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 也收斂,并且 (1) 式成立.

証. 我們只須証明

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n \to 0 \quad (x \to 1),$$

此处 $N = \left[\frac{1}{1-x}\right]$ 为 $\frac{1}{1-x}$ 的整数部分或证明

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) \to 0.$$

因为 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, 所以給定 $\varepsilon > 0$, 可取 N 很大,使 $|na_n| < \varepsilon (n > N)$, 于是

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} na_n \cdot \frac{x^n}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-x)} < \varepsilon.$$

又由 $na_n \to 0$ 可以推出(平均値的极限等于原貫的极限)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n|a_n| \to 0 \quad (N \to \infty).$$

所以

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n)\right| < (1-x) \sum_{n=0}^{N} n|a_n| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n|a_n| \to 0.$$

由此得出定理.

这两个定理可作种种推广,例如将 x 推广到复变数 z 的情形,又 Tauber 定理中关于 a_n 阶的限制可作一定程度的放寬,例如将 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ 換成 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ 等. 这些定理統称之为 Abelian 与 Tauberian 定理,它构成了数学分析中的一个重要部分,我們在这里不再詳細介紹了.

§ 8. 求隐函数的逐渐逼近法

我們假定 $F(x, y)$ 及其微商 $F'_y(x, y)$ 在以 (x_0, y_0) 为中心的正方形

(D) $$|x-x_0|\leqslant\Delta,\quad |y-y_0|\leqslant\Delta$$
中連續,并且
$$F(x_0,y_0)=0,\quad F'_y(x_0,y_0)\neq 0.$$
前已証明在 (x_0, y_0) 附近,可由
$$F(x,y)=0 \tag{1}$$
解出 y 来,換言之,有一个单元連續函数
$$y=f(x)$$
适合于 $y_0=f(x_0)$,而且有恆等式
$$F[x,f(x)]=0.$$
我們現在可以利用一致收斂的原則来具体的定出 $y=f(x)$ 来.

首先討我們討論一个比較簡单的問題,就是方程 (1) 具有
$$y=y_0+\varphi(x,y) \tag{2}$$
的特殊形式,此处 $\varphi(x_0,y_0)=0$,
$$|\varphi'_y(x_0,y_0)|<1. \tag{3}$$
注意,这样做并不失去普遍性,原因是我們可以把一般方程 (1) 改写成
$$y=y_0+\left[y-y_0-\frac{F(x,y)}{F'_y(x_0,y_0)}\right],$$
而命
$$\varphi(x,y)=y-y_0-\frac{F(x,y)}{F'_y(x_0,y_0)}.$$
如此,則 $\varphi(x_0,y_0)=0$, $\varphi'_y(x_0,y_0)=1-1=0$.

我們現在来解方程 (2),由 φ'_y 及 φ 的連續性,我們可以取 Δ 足够小,使在 D 中
$$|\varphi'_y(x,y)|<\lambda\quad(<1),$$
又取 δ 很小,使在 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 中,有不等式
$$|\varphi(x,y_0)|<(1-\lambda)\Delta. \tag{4}$$
現在我們在
(D^*) $$|x-x_0|\leqslant\delta,\quad |y-y_0|\leqslant\Delta$$
中来作进一步的討論.

把 $y=y_0$ 代入 (2) 式右边,則得 x 的函数
$$y_1=y_1(x)=y_0+\varphi(x,y_0).$$
再把 $y=y_1$ 代入 (2) 式右边,又得出一个 x 的函数
$$y_2=y_2(x)=y_0+\varphi(x,y_1).$$
同此得
$$y_3=y_3(x)=y_0+\varphi(x,y_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=y_n(x)=y_0+\varphi(x,y_{n-1}). \tag{5}$$
如此得出一个函数貫

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x),\ \cdots,$$

我們說,这个貫的极限 $y(x)$ 存在.

先証明这样的 $y_n(x)$ 都在区間

$$|y-y_0|\leqslant\Delta$$

中. 显然 $|y_1-y_0|<(1-\lambda)\Delta\leqslant\Delta$. 今若

$$|y_{n-1}-y_0|\leqslant\Delta,$$

則由 (5) 可知,

$$y_n-y_0=\varphi(x,\ y_{n-1}).$$

但

$$|\varphi(x,\ y_{n-1})|\leqslant|\varphi(x,\ y_{n-1})-\varphi(x,\ y_0)|+|\varphi(x,\ y_0)|.$$

由中值定理,右边的第一部分为

$$|\varphi(x,\ y_{n-1})-\varphi(x,\ y_0)|=|\varphi'_y(x,\ y)||y_{n-1}-y_0|<\lambda\Delta,$$

对第二部分,由 (4) 可知其 $<(1-\lambda)\Delta$, 所以

$$|y_n-y_0|<\lambda\Delta+(1-\lambda)\Delta=\Delta.$$

卽得所断言者.

其次, $y_n(x)$ 都是 x 的連續函数. 显然 $y_1(x)$ 連續. 假定 $y_{n-1}(x)$ 也連續, 則当 x 与 x' 充分接近时, $y_{n-1}(x)$ 与 $y_{n-1}(x')$ 可以任意小. 故由

$$y_n(x)-y_n(x')=\varphi(x,\ y_{n-1}(x))-\varphi(x',\ y_{n-1}(x'))$$

与 $\varphi(x,\ y)$ 的連續性,推出 $y_n(x)$ 为連續.

現在进一步討論函数貫 $\{y_n\}$ 的收斂問題. 我們考虑級数

$$y_0+\sum_{n=1}^{\infty}(y_n-y_{n-1}). \tag{6}$$

利用中值定理,

$$|y_n-y_{n-1}|=|\varphi(x,\ y_{n-1})-\varphi(x,\ y_{n-2})|<\lambda|y_{n-1}-y_{n-2}|.$$

連續应用得

$$\begin{aligned}|y_n-y_{n-1}|&<\lambda|y_{n-1}-y_{n-2}|<\lambda^2|y_{n-2}-y_{n-3}|\\&<\cdots<\lambda^{n-1}(1-\lambda)\Delta,\end{aligned}$$

而几何級数

$$(1-\lambda)\Delta\sum_{1}^{\infty}\lambda^{n-1}$$

收斂,因此級数 (6) 在 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 中一致收斂,所以

$$y=y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)$$

在指定的区域內連續.

由 (5) 可知 $y=y(x)$ 是方程 (1) 的一个解,現在我們进一步証明唯一性.

如果有另一解 $\tilde{y}$,則

$$\tilde{y}=y_0+\varphi(x,\ \tilde{y}).$$

与原解相减得

$$|y-\tilde{y}| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, \tilde{y})| < \lambda|y-\tilde{y}|.$$

因 $\lambda < 1$, 所以 $y \neq \tilde{y}$ 不可能.

这是一个值得注意的方法,請讀者熟讀.

§9. 无 穷 乘 积

現在討論无穷乘积

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots.$$

我們用符号

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{1}$$

来表示它,并假定 a_n 中沒有一个等于 -1.

命 P_n 表部分积

$$P_n = \prod_{m=1}^{n}(1+a_m).$$

如果当 $n\to\infty$ 时, P_n 趋于一个非 0 的极限,則无穷乘积称为收斂.

这儿不将 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$ 的情况定义为收斂,完全是为了以后的方便.

不收斂的无穷乘积称为发散,而 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$, 則称发散于 0.

例 1. 乘积

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdots$$

是收斂的.

显然,如果 (1) 收斂,則 $a_n \to 0$.

先从几个簡单的情况开始.

1) 如果 $a_n \geqslant 0$, 无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

与級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

同为收斂或同为发散.

証. P_n 是一非減貫,所以这貫或者收斂或者趋向正无穷,因为

$$a_1+\cdots+a_n \leqslant (1+a_1)\cdots(1+a_n) \leqslant e^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

由此得出結果.

2) 如果 $a_n \leqslant 0$, 命 $a_n = -b_n$, 我們研究乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n).$$

2.1) 如果 $b_n \geqslant 0$、$b_n \neq 1$ $(n=1, 2, \cdots)$, $\sum b_n$ 收斂,則 $\Pi(1-b_n)$ 也收斂.

因为 Σb_n 收斂,故能取N充分大,使

$$b_N + b_{N+1} + \cdots < \frac{1}{2};$$

特别有 $b_n < 1 (n \geqslant N)$. 于是

$$(1-b_N)(1-b_{N+1}) \geqslant 1 - b_N - b_{N+1},$$
$$(1-b_N)(1-b_{N+1})(1-b_{N+2}) \geqslant (1-b_N-b_{N+1})(1-b_{N+2})$$
$$\geqslant 1 - b_N - b_{N+1} - b_{N+2},$$

一般說来,有

$$(1-b_N)(1-b_{N+1})\cdots(1-b_n) \geqslant 1 - b_N - \cdots - b_n > \frac{1}{2}.$$

当 $n \geqslant N$ 时 P_n/P_{N-1} 单調下降,且有一正下界,故 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n/P_{N-1}$ 有极限存在,且大于 0. 因 $P_{N-1} \neq 0$, 所以得到所說的結論.

2.2) 若 $0 \leqslant b_n < 1$ 及 $\sum b_n$ 发散,則 $\Pi(1-b_n)$ 发散于 0.

若 $0 \leqslant b < 1$, 則 $1 - b \leqslant e^{-b}$, 所以

$$0 < (1-b_1)(1-b_2)\cdots(1-b_n) \leqslant e^{-b_1-b_2-\cdots-b_n}.$$

右边趋于 0 ,所以得出結論.

于是得到:若 $0 \leqslant b_n < 1$, 則无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同为收斂或同为发散.

§ 10. 无穷乘积的收斂条件

現在 a_n 可能是实数或复数,但 $\neq -1$.

定义. 如果乘积

$$\prod_{b=1}^{\infty}(1+|a_n|)$$

收斂,則乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

称为絕对收斂.

由前已知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的收斂是乘积絕对收斂的必要且充分条件.

現在証明

定理 1. 絕对收斂的乘积一定收斂.

証. 命

$$p_n = \prod_{m=1}^{n}(1+a_m), \quad P_n = \prod_{m=1}^{n}(1+|a_m|).$$

由

$$p_n - p_{n-1} = (1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})a_n$$

及

$$P_n - P_{n-1} = (1+|a_1|)\cdots(1+|a_{n-1}|)|a_n|,$$

显然有

$$|p_n - p_{n-1}| \leqslant P_n - P_{n-1},$$

今若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收斂，則 P_n 有极限，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(P_n - P_{n-1})$ 收斂. 由比較法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n - p_{n-1})$ 收斂，即 p_n 有极限.

現在証明这极限不能为 0. 由 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的收斂导出 $1 + a_n \to 1$，所以級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|$$

也收斂. 再由以上証明了的結果，乘积

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{a_m}{1+a_m}\right)$$

也有极限，但此乘积等于 $1/p_n$，故 p_n 的极限 $\neq 0$.

不难証明，絕对收斂乘积各因子的次序可以任意变换而不改变乘积的数值.

例 1.

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

这是由于

$$p_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}.$$

例 2. 由 π 的 Wallis 公式，

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots = 2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

及例 1 得到

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)} = \frac{2}{\pi}.$$

§ 11. 无穷乘积的对数

若

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = p.$$

是否有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) = \log p.$$

此处 $\log z$ 表示 z 的对数的主值，即其虚数部分在 $-\pi$ 与 π 之間者.

如果 a_n 都是正实数，則所有的对数都取普通的实数值. 以上的等式是对的，但在一般的情况下，却不一定相等而需要作些說明.

仍命 p_n 表前 n 个部分乘积，且命

$$p_n = \rho_n e^{i\varphi_n},$$

当 $n \to \infty$ 时，ρ_n 趋限并且如果适当的取 φ_n，則 φ_n 也趋限.

命

$$1 + a_n = \gamma_n e^{i\theta_n} \qquad -\pi < \theta_n \leqslant \pi.$$

由于 $a_n \to 0$，所以当 $n \to \infty$ 时 $\theta_n \to 0$.

命

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \log(1+a_m) = \log p_n + 2k_n i\pi,$$

此处 k_n 是一整数，現在有

$$2k_n\pi = \theta_1 + \cdots + \theta_n - \varphi_n,$$

故

$$2\pi(k_{n+1} - k_n) = \theta_{n+1} - (\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$

右方趋向于 0. 故当 n 充分大时，

$$2\pi|k_{n+1} - k_n| < 2\pi,$$

即得 $k_{n+1} = k_n$. 因此，当 n 充分大时，$k_n = k$ 是一常数，即

$$s_n = \log p_n + 2ki\pi \quad (n > N).$$

命 $n \to \infty$，則得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) = \log p + 2ki\pi.$$

此級数的和是乘积的对数，但不一定是主值.

又可注意者在証明中也可得，当 N 充分大时，

$$\sum_{N+1}^{\infty} \log(1+a_n) = \log p - \log p_N.$$

如果我們由对数的級数出发，且假定

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) = s,$$

則得

$$e^{s_n} = p_n.$$

故

$$p_n \to p = e^s,$$

即乘积收斂于和的指数.

根据以上的討論，我們得到

定理 1. 乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

收斂的必要且充分条件是級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$$

的收斂.

例 1. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 收斂，则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收斂.

由

$$\log(1+a_n)=a_n+O(|a_n|^2)$$

可以推出这結果.

例 2. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2, \cdots, \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{k-1}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^k$ 都收斂，则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收斂.

例 3. 若 a_n 为实数且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂，则当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收斂时，乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收斂，而当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散时，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于零.

由

$$\log(1+a_n)=a_n-a_n^2/2+o(a_n^2)$$

可以推出这結果. 由此可知，乘积

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdots$$

发散于零.

例 4. $\prod_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|=\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$，故乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|$ 收斂. 但另一方面，由

$$1+\frac{i}{n}=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\,e^{i\theta_n}$$

可知，

$$\theta_n=\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

因此乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

发散.

習題 1. 命

$$a_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}},\quad a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},$$

则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收斂、但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都发散.

習題 2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 收斂，則 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)e^{a_n}$ 收斂；若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^3$ 收斂，則 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)e^{a_n+\frac{1}{2}a_n^2}$ 收斂.

習題 3. 試求

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}.$$

習題 4. 試求

$$\frac{1}{e}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}$$

的值.

§ 12. 无穷乘积的一致收斂

如果貫

$$P_n(x)=\prod_{m=1}^{n}(1+u_m(x)),\quad n=1,2,3,\cdots$$

一致收斂并且极限永不为零，則我們称这无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}[1+u_n(x)]$$

一致收斂.

最簡单的判別法是

定理 1. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在某一域內一致收斂，且 $u_n(x)\neq -1$，則乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(x))$ 也在該域內一致收斂.

証明并无新原則，只須注意"一致"性. 命 M 为

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$$

在这域中的上界，則

$$[1+|u_1(x)|]\cdots[1+|u_n(x)|]<e^{|u_1(x)|+\cdots}\leqslant e^M.$$

命

$$P_n(x)=\prod_{m=1}^{n}\{1+|u_m(x)|\},$$

則

$$P_n(x)-P_{n-1}(x)=[1+|u_1(x)|]\cdots[1+|u_{n-1}(x)|]|u_n(x)|<e^M|u_n(x)|.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}[P_n(x)-P_{n-1}(x)]$ 一致收斂. 于是与定理 13.9.1 同样地得出結果.

例 1. 当 $|x|<1$ 时

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

由

$$(1-x)P_n=1-x^{2^n}\to 1\quad(n\to\infty)$$

即得所証. 将等式左右双方都展成 x 的冪級数，即可証明任一正整数可用二进位唯一地表出来.

例 2. 当 $|x|<1$ 时,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

可由左边等于

$$\frac{1-x^2}{1-x}\,\frac{1-x^4}{1-x^2}\,\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots$$

推出之.

例 3. 当 $\varphi\neq 0$ 时,由

$$2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\varphi}{2}=\sin\varphi$$

可知

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

取 $\varphi=\frac{\pi}{2}$,即得

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\cdots.$$

由于

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}},\quad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

等等,故得 Vieta 公式

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots.$$

例 4. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ 当 $x>1$ 时絕对收斂,当 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时条件收斂; 当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,发散于零.

例 5.

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),\quad \cos\pi x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right).$$

由于

$$(\cos z+i\sin z)^m=\cos mz+i\sin mz,$$

得

$$\sin mz=m\cos^{m-1}z\sin z-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}z\sin^3 z+\cdots.$$

以 $m=2n+1$ 代入，并注意 $\cos^{2k} z=(1-\sin^2 z)^k$，故得

$$\sin(2n+1)z = \sin z\cdot P(\sin^2 z),$$

此处 $P(u)$ 是 u 的 n 次多项式，命其根为 $u_1, u_2, \cdots, u_n$. 则

$$P(u) = A\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{u_n}\right).$$

若 z 满足

$$\sin z \neq 0, \quad \sin(2n+1)z = 0,$$

则 $\sin^2 z$ 就是 $P(u)=0$ 的根. 故得

$$u_1 = \sin^2\frac{\pi}{2n+1}, \quad u_2=\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}, \quad \cdots, \quad u_n=\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}.$$

又可知

$$A = P(0) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} = 2n+1,$$

故

$$\sin(2n+1)z = (2n+1)\sin z\left[1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right].$$

命 $z=\frac{x}{2n+1}$，则

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right].$$

假定 $x\neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$，则 $\sin x\neq 0$. 将上式改写成

$$\sin x = U_k^{(n)}V_k^{(n)},$$

此处

$$U_k^{(n)} = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right],$$

$$V_k^{(n)} = \left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+1)\pi}{2n+1}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right].$$

固定 k，命 $n\to\infty$，则得

$$U_k = \lim_{n\to\infty}U_k^{(n)} = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

因此极限

$$\lim_{n\to\infty}U_k^{(n)} = U_k$$

存在.

现在来研究 $V_k=\lim\limits_{n\to\infty}V_k^{(n)}$. 当 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\frac{2}{\pi}\varphi < \sin\varphi < \varphi.$$

故得

$$\sin^2\frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2},$$

$$\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{h^2\pi^2}{(2n+1)^2} \quad (h = k+1, \cdots, n).$$

因此

$$1 > V_k^{(n)} > \left(1 - \frac{x^2}{4(k+1)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right) > \bar{V}_k,$$

此处

$$\bar{V}_k = \prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{4h^2}\right).$$

命 $n \to \infty$, 得

$$1 > V_k \geqslant \bar{V}_k.$$

因为

$$\lim_{k\to\infty}\bar{V}_k = 1,$$

故得

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n\pi^2}\right).$$

于是

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x} = \frac{2x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right)}{2x\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

因此

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right), \quad \cos\pi x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right).$$

習題 1.

$$\operatorname{sh} x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

習題 2.

$$\operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right].$$

§ 13. 带参数的积分

我們現在把一致收斂的概念推广到积分上.

假定 $f(x, y)$ 在方条

$$a \leqslant x \leqslant \infty, \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta$$

上定义,且对任一固定的 y, 积分

$$\phi(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx \tag{1}$$

恆存在.

定义. 如果任給 $\varepsilon>0$, 我們可以找到依于 ε 但不依于 y 的 x_0, 使当 $x>x_0$ 时,

$$\left|\phi(y)-\int_a^x f(x,y)dx\right|<\varepsilon,$$

則积分 (1) 称为一致收斂.

与以往相仿,我們有一批定理:

定理 1. 如果有函数 $g(x)$ 存在,使

$$|f(x,y)|\leqslant g(x) \quad 及 \quad \int_a^\infty g(x)dx<\infty,$$

則积分 (1) 一致收斂.

定理 2 (Dirichlet). 如果 $\phi(x,y)$ 有連續偏微商 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$; 又当 $x\to\infty$ 时, $\phi(x,y)$ 单調递降(对于固定的 y),并且关于 y 一致地趋向于零. 命

$$F(x,y)=\int_a^x f(t,y)dt,$$

若 $|F|$ 小于一个与 x,y 都无关的常数 M, 則积分

$$\int_a^\infty \phi(x,y)f(x,y)dx$$

一致收斂.

証. 分部积分得

$$\int_{x'}^x \phi(x,y)f(x,y)dx=\phi(x,y)F(x,y)-\phi(x',y)F(x',y)+$$
$$+\int_{x'}^x\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)F(x,y)dx.$$

已积出的部分当 x, x' 充分大时小于任何給定的 ε. 又因

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x}>0.$$

及 $|F(x,y)|$ 小于 M, 所以

$$\left|\int_{x'}^x\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)F(x,y)dx\right|\leqslant M\int_{x'}^x\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx=M[\phi(x',y)-\phi(x,y)],$$

它当 x, x' 充分大时也小于 ε, 所以积分一致收斂.

定理 3 (Abel). 若积分

$$\int_a^\infty f(x,y)dx$$

对于 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 一致收斂, $\phi(x,y)$ 为 x 的单調函数 (对于固定的 y), 它有連續偏微商 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$,且一致有界(即存在常数 L,使 $\phi(x,y)<L$ 对适合 $x\geqslant a, \alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 的一切 (x,y) 都成立),則

$$\int_a^\infty f(x, y)\varphi(x, y)dx$$

一致收斂.

这定理的証明不难,讀者試自証之.

与上面相类似,我們还可以定义另一种瑕积分的一致收斂.

假定 $f(x, y)$ 在 $a \leqslant x < b$ (或 $a < x \leqslant b$), $c \leqslant y \leqslant d$ 上定义, 且对 $c \leqslant y \leqslant d$ 中的任何 y, 积分

$$\int_a^b f(x, y)dx$$

恆存在;若对任何 $\varepsilon > 0$, 存在仅依于 ε 而不依于 y 的 $\eta > 0$ 使

$$\left|\int_{b-\eta}^b f(x, y)dx\right| < \varepsilon \left[\text{或} \left|\int_a^{a+\eta} f(x, y)dx\right| < \varepsilon\right],$$

則称积分 (2) 是一致收斂的.

我們也有类似于上面关于判别一致收斂的定理.

附記. 可以将上面的定义及定理条件中的 $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ 换为某一实数集合.

例 1. 积分

$$I(y) = \int_0^\infty ye^{-xy}\,dx$$

在 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 中不一致收斂.

因为

$$\int_A^\infty ye^{-xy}\,dx = \int_{yA}^\infty e^{-t}\,dt = e^{-Ay} \to 1 \quad (y \to 0),$$

所以 $I(y)$ 不一致收斂。

例 2. 积分

$$\int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^y}\,dx$$

在 $y \leqslant y_0 (<2)$ 中一致收斂,但在 $y<2$ 中并不一致收斂.

当 $y \leqslant y_0 (<2)$ 时,对于 $\varepsilon > 0$, 可取 $\eta > 0$ 使

$$\frac{\eta^{2-y_0}}{2-y_0} < \varepsilon.$$

故

$$\left|\int_{1-\eta}^1 \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^y}\,dx\right| \leqslant \int_{1-\eta}^1 \frac{1}{(1-x)^{y_0-1}}\,dx = \int_0^\eta \frac{dz}{z^{y_0-1}} = \frac{\eta^{2-y_0}}{2-y_0} < \varepsilon.$$

故积分在 $y \leqslant y_0 < 2$ 中一致收斂,但对 $y < 2$, 可取 η 适当小,使当 $1-\eta \leqslant x < 1$ 时

$$\frac{\sin(1-x)}{1-x} > \frac{1}{2}.$$

故

$$\left|\int_{1-\eta}^1 \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^y}\,dx\right| > \frac{1}{2}\int_0^\eta \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\eta^{2-y}}{2-y} \to \infty\ (\text{当 } y \to 2).$$

故在 $y < 2$ 中,积分不一致收斂.

例 3. 証明积分

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx \quad (\alpha>0)$$

在 $\beta \geqslant \beta_0(>0)$ 中一致收斂.

当 $\beta \geqslant \beta_0$ 时,

$$\left|\int_0^A \sin\beta x\,dx\right| = \left|\frac{1-\cos\beta A}{\beta}\right| \leqslant \frac{2}{\beta_0},$$

而 $\frac{x}{\alpha^2+x^2}$ 与 β 无关,当 $x \geqslant \alpha$ 时单調减少,且当 $x\to\infty$ 时趋于零. 故由定理 2 可知

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx$$

在 $\beta \geqslant \beta_0(>0)$ 中一致收斂.

定理 4. 假定 $f(x, y)$ 在长方形

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad \alpha\leqslant y\leqslant\beta$$

中連續,則在 $[\alpha, \beta]$ 中,

$$\phi(y)=\int_a^b f(x, y)dx$$

是 y 的連續函数,換言之,如果 $\alpha\leqslant y_0\leqslant\beta$, 則

$$\lim_{y\to y_0}\phi(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b f(x, y_0)dx.$$

証. 由

$$\phi(y+k)-\phi(y)=\int_a^b\{f(x, y+k)-f(x, y)\}dx,$$

給了 $\varepsilon>0$, 由一致連續性,我們能选取 k_0, 使当 $|k|<k_0$ 时,对所有的 x, y,

$$|f(x, y+k)-f(x, y)|\leqslant\varepsilon,$$

故

$$|\phi(y+k)-\phi(y)|\leqslant\varepsilon(b-a).$$

卽得定理.

例 4. 不用求出下面的积分

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx、\quad \int_0^1 \log(x^2+y^2)dx,$$

便可看出它們是 y 的連續函数 $(y\geqslant\alpha>0)$.

定理 5. 若 $f(x, y)$ 在

$$x\geqslant a, \quad y\geqslant c$$

中連續. 設 $y_0\geqslant c$ (y_0 可以为 ∞), 假設 $f(x, y)$ 于 $y\to y_0$ 时在 x 的任何有限区間中一致趋于某可积函数 $\varphi(x)$,又

$$I(y)=\int_a^\infty f(x, y)dx$$

在 $y\geqslant c$ 中一致收斂,則

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \int_a^\infty \varphi(x)dx.$$

証. 由于 $I(y)$ 的一致收斂性及 $\varphi(x)$ 的可积性,对任何 $\varepsilon > 0$,可取 N 充分大,使

$$\left|\int_N^\infty f(x, y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ (y > c), \quad \left|\int_N^\infty \varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又因在区間 $[a, N]$ 中, $f(x, y)$ 一致趋于 $\varphi(x)$,故存在 δ,使当 $|y-y_0|<\delta$ 时(若 $y_0=\infty$,則存在 M, 使当 $y > M$ 时),

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(N-a)}.$$

于是

$$\left|\int_a^N f(x, y)dx - \int_a^N \varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (|y - y_0| < \delta \quad 或 \quad y > M).$$

因此当 $|y - y_0| < \delta$ (或 $y > M$) 时,

$$\left|\int_a^\infty f(x, y)dx - \int_a^\infty \varphi(x)dx\right| < \varepsilon.$$

定理証完.

注意. 当 y_0 为一有限数时, $f(x, y)$ 趋于 $\varphi(x)$ 的一致性条件可以略去,而在証明中,可用 $f(x, y)$ 的一致連續性代替.

§ 14. 积分号下求微分

定理 1. 如果

$$f(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

在 $a \leqslant x \leqslant b$, $y_0 - \eta \leqslant y \leqslant y_0 + \eta$ $(\eta > 0)$ 上連續,則

$$\left(\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)dx\right)_{y=y_0} = \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}dx\right)_{y=y_0}.$$

証. 命

$$\phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx, \quad g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

則

$$\frac{\phi(y_0 + k) - \phi(y_0)}{k} = \frac{1}{k}\int_a^b [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]dx$$

$$= \int_a^b g(x, y_0 + \theta k)dx, \quad 0 < \theta < 1.$$

由于 $g(x, y)$ 是一致連續,所以

$$\lim_{k\to 0}\int_a^b g(x, y_0 + \theta k)dx = \int_a^b g(x, y_0)dx.$$

定理 2. 如果

$$f(x, y)、\quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

在 $x \geqslant a$, $y_0 - \eta \leqslant y \leqslant y_0 + \eta$ 中連續,又若积分

$$\int_a^\infty f\,dx$$

收斂,并且

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$$

在 $[y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ 中一致收斂,則在 $y = y_0$ 处

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx.$$

証. 命

$$\int_{a+n-1}^{a+n} f(x, y)dx = u_n(y),$$

則

$$\int_a^\infty f(x, y)dx = \sum_{n=1}^\infty u_n(y).$$

由定理 1 可知

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{a+n-1}^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{d}{dy}\int_{a+n-1}^{a+n} f\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{d}{dy}u_n(y).$$

由級数的一致收斂性,可得以上的結論.

例如,当 $y > 0$ 时,

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx = \int_0^1 D_y \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx = -\int_0^1 \frac{xdx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\log\frac{y^2}{1 + y^2},$$

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 \log(x^2 + y^2)dx = \int_0^1 D_y \log(x^2 + y^2)\,dx = \int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2}\,dx = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

这些結果也可以通过直接計算积分

$$I_1(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}y\log\frac{y^2}{1 + y^2},$$

$$I_2(y) = \int_0^1 \log(x^2 + y^2)dx = \log(1 + y^2) - 2 + 2y\operatorname{arctg}\frac{1}{y},$$

然后对 y 取微商而得.

当 $y = 0$ 时,定理的条件不能滿足;另一方面,当 $y \to 0$ 时,

$$\frac{I_1(y) - I_1(0)}{y} = \frac{1}{2}\log\frac{y^2}{1 + y^2} - \frac{\operatorname{arctg} y}{y} \to -\infty,$$

所以在 $y = 0$ 处,不存在有限微商. 又当 $y \to 0$ 时,

$$\frac{I_2(y) - I_2(0)}{y} = \frac{\log(1 + y^2)}{y} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{y} \to \pi,$$

即 $I_2'(0) = \pi$. 但被积函数对 y 的微商在 $y = 0$ 处等于零,所以积分也等于 0. 定理不正确.

§ 15. 积分号下求积分

定理 1. 如果函数 $f(x, y)$ 在矩形

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上連續，則

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

証. 我們証明更普遍一些的公式. 如果 $c \leqslant \eta \leqslant d$，則

$$\int_c^\eta \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^\eta f(x, y) dy \right) dx. \tag{1}$$

上式的左方和右方都是参数 η 的两个函数. 我們現在計算它們对 η 的微商.

左方外层积分具有被积函数

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

由定理 13.4，它是 y 的連續函数，所以左方对上限的微商就等于

$$I(\eta) = \int_a^b f(x, \eta) dx.$$

(1) 式右方积分就是

$$\int_a^b \varphi(x, \eta) dx, \quad \varphi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y) dy.$$

函数 $\varphi(x, \eta)$ 适合于定理 14.1 的条件，因由定理 13.4 可知，$\varphi(x, \eta)$ 是 x 的連續函数. 再取微商得

$$\varphi'_\eta(x, \eta) = f(x, \eta),$$

把 $\varphi'_\eta(x, \eta)$ 看成二元函数，它是連續的，所以得出

$$\frac{d}{d\eta} \int_a^b \varphi(x, \eta) dx = \int_a^b \varphi'_\eta(x, \eta) dx = \int_a^b f(x, \eta) dx = I(\eta).$$

所以如果把 (1) 式的左方与右方都看成 η 的函数，那末它們有相等的微商. 因此，它們仅相差一个常数. 但当 $\eta = c$ 时，左、右方都等于 0，因而 (1) 式对所有的 η 恆成立.

例 1. 命 $f(x, y) = x^y$，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$a \leqslant y \leqslant b$ $(0 < a < b)$ 时定理的条件适合，所以

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

由左方容易得出

$$\int_a^b \frac{dy}{1 + y} = \log \frac{1 + b}{1 + a},$$

而右方等于

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx,$$

因此得到

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log\frac{1+b}{1+a}.$$

例 2. 函数

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

在矩形 $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$ 上不适合定理的条件，因为 $x = 0,\ y = 0$ 是一間断点，我們有

$$\int_0^1 f\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2} \quad (y > 0),$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f\,dx = \operatorname{arctg} y\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4};$$

但另一方面，

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f\,dy = -\frac{\pi}{4}.$$

定理 2. 若 $f(x, y)$ 在

$$x \geqslant a, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上連續，又若积分

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

在 $c \leqslant y \leqslant d$ 上一致收斂，則

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

証. 对于任何 $A \geqslant a$，由定理 1 可知

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

記

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)\,dx,$$

則当 $A \to \infty$ 时，$F(A, y)$ 在 $c \leqslant y \leqslant d$ 一致收斂于 $I(y)$. 故由定理 13.5 可知，

$$\lim_{A\to\infty} \int_c^d F(A, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx,$$

故得定理.

定理 3. 若 $f(x, y)$ 在

$$x \geqslant a, \quad y \geqslant c$$

上連續，并且积分

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx \quad 与 \quad \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

分别在 $y \geqslant c$ 与 $x \geqslant a$ 的任意有限区間上一致收斂；若

$$\int_c^\infty dy\int_a^\infty |f(x, y)|dx \quad 与 \quad \int_a^\infty dx\int_c^\infty |f(x, y)|dy$$

中至少有一个存在，则

$$\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x, y)dx \quad 与 \quad \int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x, y)dy$$

都存在，并且相等，也即

$$\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x, y)dy = \int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x, y)dx.$$

証. 不妨假定

$$\int_a^\infty dx\int_c^\infty |f(x, y)|dy$$

存在. 由于

$$\int_a^\infty f(x, y)dx$$

在 y 的任何有穷区間上一致收斂，故由定理 2 可知，对任何 $C > c$，有

$$\int_c^C dy\int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty dx\int_c^C f(x, y)dy.$$

又因

$$\left|\int_c^C f(x, y)dy\right| \leqslant \int_c^\infty |f(x, y)|dy,$$

命 $F(x,C) = \int_c^C f(x, y)dy$, $g(x) = \int_c^\infty |f(x, y)|dy$，由假設則有 $\int_a^\infty g(x)dx<\infty$. 故由定理 13.1 可知

$$\int_a^\infty dx\int_c^C f(x, y)dy$$

对于 $C \geqslant c$ 一致收斂. 于是由定理 13.5 可知，

$$\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x, y)dx = \lim_{C\to\infty}\int_a^\infty dx\int_c^C f(x, y)dy = \int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x, y)dy.$$

定理証完.

定理 4. 若 $f(x, y)$ 是

$$x \geqslant a, \quad y \geqslant c$$

中的非負連續函数；若

$$I(x) = \int_c^\infty f(x, y)dy \quad 与 \quad I_1(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$$

都是連續函数，那末在下面两个二重积分

$$\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x, y)dy \quad 与 \quad \int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x, y)dx$$

中有一个存在时，另一个也存在，而且二者相等.

在証明以前先証明

定理 5 (Dini). 若 $u_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 及 $f(x) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 都是 $[a, b]$ 上非負的連續函数，則 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂.

証. 級数的余式

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)=f(x)-f_n(x)$$

是两个連續函数之差,故仍为連續函数. 由于 $u_n(x)\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$, 故

$$\varphi_1(x)\geqslant\varphi_2(x)\geqslant\cdots\geqslant\varphi_n(x)\geqslant\cdots.$$

固定 x, 由于級数的收斂性,故

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0.$$

倘級数非一致收斂,則对某一 $\varepsilon>0$, 存在 x_n, 使

$$\varphi_n(x_n)\geqslant\varepsilon.$$

由 Bolzano-Weierstrass 定理可知,在 $\{x_n\}$ 中可以找出一个子貫 $\{x_{n_k}\}$, 以 $[a,b]$ 上一点 x_0 为极限. 故

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0).$$

当 $n_k\geqslant m$ 时

$$\varphi_m(x_{n_k})\geqslant\varphi_{n_k}(x_{n_k})\geqslant\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0)\geqslant\varepsilon,$$

故

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x_0)\geqslant\varepsilon.$$

由此得到矛盾,故得定理.

定理 4 的証明. 取 $\{y_n\}$ 为递增且趋向于 ∞ 的貫,命

$$F(x,y_n)=\int_c^{y_n}f(x,y)dy,$$

則

$$I(x)=F(x,y_1)+\sum_{n=2}^{\infty}\{F(x,y_n)-F(x,y_{n-1})\}.$$

由定理 5 可知, $I(x)$ 在 $x\geqslant a$ 中的任何有限区間上一致收斂. 同理可知, $I_1(y)$ 在 $y\geqslant c$ 中的任何有限区間上一致收斂. 故由定理 3 得定理 4.

例 3. 在 § 3 中已經算出 Dirichlet 积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

現在再用另一方法証明之.

考慮

$$J=\int_0^{\infty}e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx\quad(a>0,k>0).$$

因为

$$\int_0^{\infty}e^{-kx}\cos ax\,dx=\frac{k}{a^2+k^2}$$

当 $a\geqslant 0$ 时一致收斂,故由定理 14.-2, 对于 $a>0$,

$$\frac{dJ}{da}=\frac{k}{a^2+k^2},$$

因此

$$J=\operatorname{arctg}\frac{a}{k}+c.$$

当 $a=0$ 时, $J=0$, 故得

$$J=\operatorname{arctg}\frac{a}{k}.$$

由 Abel 定理（定理 13.3）可知，当 $k\geqslant 0$ 时，J 一致收敛. 故由定理 13.5 得到

$$\lim_{k\to 0^+}J=\int_0^\infty\frac{\sin ax}{x}dx=\lim_{k\to 0^+}\operatorname{arctg}\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}.$$

特别取 $a=1$, 就得到

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

例 4. 求

$$J=\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

作代换 $x=ut$, 则

$$J=u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt.$$

各边都乘以 $e^{-u^2}du$ 并积分之，则得

$$J\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}du=J^2=\int_0^\infty e^{-u^2}u\,du\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt.$$

由于

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt=e^{-u^2}J$$

及

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2},$$

前者是 u 的連續函数，而后者是 t 的連續函数，故由定理 4 可知，

$$J^2=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

因此

$$J=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 5. 求

$$y=\int_0^\infty\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx,\quad z=\int_0^\infty\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx,\ (\alpha,\beta>0)$$

当 $\beta\geqslant\beta_0>0$ 时, z 是一致收斂的，故

$$\frac{dy}{d\beta}=-z.$$

因为

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\beta>0),$$

所以

$$\frac{dy}{d\beta}+\frac{\pi}{2}=\alpha^2\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x(\alpha^2+x^2)}dx.$$

现在又能在积分号下取微商了，故得

$$\frac{d^2y}{d\beta^2}=\alpha^2\int_0^{\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\alpha^2 y.$$

因此

$$y=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}.$$

由于

$$|y|\leqslant\int_0^{\infty}\frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha},$$

故必须 $C_1=0$，否则命 $\beta\to\infty$，将得出矛盾．又当 $\beta\to 0$ 时，可在积分号下取极限，于是得出 $C_2=\frac{\pi}{2\alpha}$．故得

$$y=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta},$$

$$z=-\frac{dy}{d\beta}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}.$$

例 6. 求 Fresnel 积分 $\int_0^{\infty}\sin x^2\,dx$ 与 $\int_0^{\infty}\cos x^2\,dx$.

命 $x^2=t$，则

$$\int_0^{\infty}\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-tu^2}du,$$

故

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-kt}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-kt}\sin t\,dt\int_0^{\infty}e^{-tu^2}du.$$

由定理 3 可知，上面的积分可以交换，故

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-kt}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}du\int_0^{\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+(k+u^2)^2}.$$

由 Abel 定理，左方的积分关于 $k\geqslant 0$ 一致收敛，故可在积分号下命 $k\to 0$ 而取极限．又对右方的积分，也能在积分号下取极限，于是得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^4}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

所以

$$\int_0^{\infty}\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

同法可得

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

§ 16. 上下限依于参变数的积分

定理 1. 仍假定 $f(x, y)$ 在

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上連續,并且假定

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y), \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

是二条連續曲綫,并且 $a \leqslant \alpha(y) \leqslant b$, $a \leqslant \beta(y) \leqslant b$, 則积分

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx$$

是在 $[c, d]$ 上的 y 的連續函数.

这定理看来复杂,但已无实質上的困难. 我們取一个特殊值 $y = y_0$,則积分可以分为三部分:

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)dx.$$

第一个积分,由于它的上下限都是常数,所以可知

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)dx.$$

又由

$$\left|\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)dx\right| \leqslant M|\beta(y) - \beta(y_0)|$$

及

$$\left|\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)dx\right| \leqslant M|\alpha(y) - \alpha(y_0)|,$$

此处 $M = \max|f(x, y)|$, 由 $\alpha(y)$ 与 $\beta(y)$ 的連續性可知, 当 $y \to y_0$ 时,这两积分趋于 0. 定理証毕.

定理 2. 仍有定理 1 的假定,且假定有連續偏微商 $f_y'(x, y)$,又設微商 $\alpha'(y)$ 与 $\beta'(y)$ 都存在,則积分 $I(y)$ 的微商等于

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y'(x, y)dx + \beta'(y)\cdot f[\beta(y), y] - \alpha'(y)f[\alpha(y), y].$$

仍如定理 1 的証明方法,对于第一个积分有

$$\left(\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)dx\right)_{y=y_0} = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y'(x, y_0)dx.$$

另一方面,由中值定理我們有

$$\frac{1}{y - y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)dx = \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} f(\bar{x}, y),$$

此处 $\bar{x}$ 是 $\beta(y)$ 与 $\beta(y_0)$ 之間的一个数值. 因此当 $y \to y_0$ 时,这积分趋于

$$\beta'(y_0)f[\beta(y_0), y_0].$$

另一項也容易得出。

§17. 重　　貫

有两个自然数做足碼的数貫

$$a_{m,n}\ (m=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots)$$

称为重貫.

如果有一数量 A 存在,它有次之性质,就称它为重貫的极限:給了任意 $\varepsilon>0$,有一个正整数 N 存在,使当 $m>N$, $n>N$ 时

$$|a_{m,n}-A|<\varepsilon.$$

用符号

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} a_{m,n}=A$$

来代表它,或者称为重貫 $a_{m,n}$ 收斂于 A. 与积分的方法相同,我們可以証明

定理 1. 假定 1)

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} a_{m,n}=A$$

存在, 2)

$$P_n=\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$$

也存在,则得

$$\lim_{n\to\infty} P_n=\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{m,n})=\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} a_{m,n}.$$

如果 3)

$$Q_m=\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$$

也存在,则两个求极限的手續可以交換,即

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{m,n})=\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}).$$

定理 2. 如果对固定的 n, a_{mn} 是 m 的一个递增貫, 又对固定的 m, a_{mn} 是 n 的一个递增貫,则

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} a_{m,n}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n}=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$$

或存在或都等于 ∞.

習題 1. 試尽量多地把貫的性质推广到重貫.

§18. 二 重 級 数

給定由两个自然数足碼决定的无穷数集

$$a_{m,n}\qquad m,n=1,2,3,\cdots.$$

我們可以想象它們是排成无穷矩陣的:

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \cdots a_{1n},\ \cdots,$$
$$a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \cdots a_{2n},\ \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1},\ a_{m2},\ a_{m3},\ \cdots a_{mn},\ \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

把这些数量加在一起就是二重級数,問題在于如何把这一批数量加起来.

首先进入我們考慮的是一行一行地加起来,然后再总加起来,也就是

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\right].$$

另一方法是一列一列地加起来,然后再总加起来:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\right].$$

这两种加法結果是否相等. 不但如此,还可以有象

$$S_N=\sum_{m+n\leqslant N} a_{m,n},\quad \lim_{N\to\infty} S_N$$

这样的三角求和法,也可以有象

$$T_N=\sum_{m^2+n^2\leqslant N^2} a_{m,n},\quad \lim_{N\to\infty} T_N$$

这样的圆求和法.

求和方法很多,所得結果是否相同? 从后面例 4、例 5 可以看到,它們未必相同. 但在最簡单的情形,即 $a_{m,n}\geqslant 0$ 的情形中,我們有以下的

定理 1. 对于正項二重級数,各种求和法的結果都一样. 也即或者有有限和,由任何方法所得出的結果都相同,或者按各种求和方法都得到 $+\infty$ 的結果.

証. 我們将依次考慮各种可能性. 用 (m, n) 表示第一象限中的整点(坐标都是整数的点). 用 $\Delta_p(p=1,2,\cdots)$ 表示一列具有以下性质的有限域: $\Delta_p\subset\Delta_{p+1}$,也即前一域都套在后一域中,又第一象限中的任一整点必属于某一 Δ_p. 将足标属于 Δ_p 的諸項之和記为 $\sum\limits_{\Delta_p}$.

从级数中任意选出有限多項,并作它們的和:

$$a_{m_1,n_1}+a_{m_2,n_2}+\cdots+a_{m_k,n_k}.$$

所有这种和数成一数集,它或者有有限的上确界 G,或者无界. 在前一种情形中,显然

$$\sum_{\Delta_p}\leqslant G$$

对全体 p 都成立;但另一方面,必有一有限和 $>G-\varepsilon$,但当 p 很大时,$\sum\limits_{\Delta_p}$ 含有此有限和的每一項,所以

$$\sum_{\Delta_p}>G-\varepsilon.$$

又因 $\sum\limits_{\Delta_p}$ 非减,所以

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{\Delta_p}=G.$$

这也就是說，按这种特殊方法求和，級数是收斂的，并且它的和就等于 G. 在这种情形中，称重級数为收斂，显然，它与 Δ_p 的选择无关.

在后一种情形中，对于任給的正数 H，必有有限和

$$a_{m_1,n_1}+a_{m_2,n_2}+\cdots+a_{m_k,n_k}>H,$$

所以存在 p_0，使当 $p>p_0$ 时

$$\sum_{\Delta_p}>H.$$

因此

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{\Delta_p}=\infty.$$

在此情形中，称重級数为发散，并且它也与 Δ_p 的选取无关.

所以如果求和方法仅限于有限部分和的話，那末定理已經証明. 但是我們的定理应当包含容許无限部分和的求和方法，所以还須継續証明.

先假定重級数收斂. 用 D 表一区域，它可能有限也可能无限. 当 (m,n) 属于 D 时，命 $b_{m,n}=a_{m,n}$，否則命 $b_{m,n}=0$. 显然，当 $\sum a_{m,n}$ 收斂时，$\sum b_{m,n}$ 也收斂. 記

$$\sum_D=\sum_D a_{m,n}=\sum b_{m,n},$$

并以此作为左方的定义，則显然有

$$\sum_D\leqslant G.$$

現在命 $D_p(p=1,2,\cdots)$ 为任意一列具有 Δ_p 的特征性質的域，但現在 D_p 容許为无限域，則有

$$\sum_{D_p}\leqslant G.$$

另一方面，与前面相同地可以証明：存在 p_0，使当 $p>p_0$ 时，

$$\sum_{D_p}>G-\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{D_p}=G.$$

最后若重級数发散，則或者有一 p，使 $\sum_{D_p}$ 发散，对此情形，定理已得；或者对一切 p，$\sum_{D_p}$ 都收斂，对此情形，又与前面同样可以証明，对于充分大的 p，

$$\sum_{D_p}>H,$$

此处 H 为任意給定的正数. 所以

$$\sum_{\Delta_p} \to \infty,$$

于是定理得証。

最有用的特例是

定理 2. 如果 $a_{m,n} \geqslant 0$，則

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}. \tag{1}$$

此式的意义是：如果等式 (1) 的一方收斂，則另一方也收斂，并且二者相等。我們将另外給它二个証明。

証明一。不妨假設 (1) 式左方收斂。这意味着

$$A_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \quad (m = 1, 2, \cdots) \quad 及 \quad S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m$$

都收斂。于是因为 $a_{m,n} \leqslant A_m$，所以

$$A^{(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$$

也都收斂。因为

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} A_m = S_1,$$

而左方是 N 的单調增加貫，因此 (1) 式右方收斂，并且不大于 S_1。

現在重复上面的証明，但将 m, n 互換，我們又得到 (1) 式左方不大于右方。联合这两結果，便得定理。

証明二。仍旧假設 (1) 式左方收斂。因为

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n},$$

所以我們需要証明

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

为此，我們又只需証明

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n} \to 0, \ (N \to \infty). \tag{2}$$

記 $u_m(N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n}$，則因 $0 \leqslant u_m(N) \leqslant A_m$，而 $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ 收斂，所以 (2) 的左方关于 N 一致收斂。于是由定理 4.2 得到

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n} \right) = 0.$$

定理証毕。

对于能取正、負值的 $a_{m,n}$，(1) 式有时成立，有时不成立。对此情形，在需要証明它

成立时，我們往往象証明（二）那样，把問題先化成（2）的証明，然后再用各种特殊方法証明它成立。

定理 3. 設 $0 \leqslant a_{m,n} \leqslant b_{m,n}$，又 $\sum b_{m,n}$ 收斂，則 $\sum a_{m,n}$ 也收斂。

証. 从定理 1 的証明可以看到，正項重級数在它的有限部分和数的集合有有限上界时收斂。今 $\sum b_{m,n}$ 收斂，所以它的有限部分和数有上界，又因 $0 \leqslant a_{m,n} \leqslant b_{m,n}$，所以 $\sum a_{m,n}$ 的有限部分和数也有上界，因此 $\sum a_{m,n}$ 收斂。

下面再来討論 $a_{m,n}$ 能取正、負值或复数值的重級数。

定义. 如果 $\sum |a_{m,n}|$ 收斂，則称 $\sum a_{m,n}$ 为一絕对收斂級数。

定理 4. 对于一个絕对收斂的重級数，各种求和方法所得的結果也都相同。或者說，絕对收斂的重級数必定收斂。

証. 我們只討論 $a_{m,n}$ 为实数的情形，对于 $a_{m,n}$ 能取复数值的情形，讀者試自証明之。

当 $a_{m,n} \geqslant 0$ 时，命 $\alpha_{m,n} = a_{m,n}$，$\beta_{m,n} = 0$；而当 $a_{m,n} < 0$ 时，命 $\alpha_{m,n} = 0$，$\beta_{m,n} = -a_{m,n}$。于是我們有 $a_{m,n} = \alpha_{m,n} - \beta_{m,n}$，及

$$0 \leqslant \alpha_{m,n} \leqslant |a_{m,n}|, \quad 0 \leqslant \beta_{m,n} \leqslant |a_{m,n}|.$$

由假定及定理 3 可見，$\sum \alpha_{m,n}$，$\sum \beta_{m,n}$ 都是收斂的正項重級数，而命 α 与 β 分別为它們的和。于是采用定理 1 中的記号，可有

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} = \sum_{\Delta_p} \alpha_{m,n} - \sum_{\Delta_p} \beta_{m,n} \to \alpha - \beta.$$

当 Δ_p 換成可以是无限域的 D_p 时，上述关系仍旧眞确。但在此时，等式被取作左方的定义。显然，重級数的和 $\alpha - \beta$ 与 Δ_p 及 D_p 的选取无关。

定理 5. 命 $s_{m,n} = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} a_{p,q}$，如果

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} s_{m,n} = s$$

且 $\sum_{q=1}^{\infty} a_{p,q}$，$\sum_{p=1}^{\infty} a_{p,q}$ 都收斂，則

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\right] = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\right] = s.$$

例 1. 当 $\alpha > 1$，$\beta > 1$ 时，

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-\alpha} n^{-\beta}$$

收斂。

例 2. 当 $\alpha > 1$ 时，

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\alpha}}$$

收斂.

由

$$m^2+n^2>2mn$$

及例 1 卽得.

例 3 (Epstein ζ 函数). 命 $a>0$, $b^2<ac$, 則当 $\alpha>1$ 时,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^{\alpha}}$$

收斂.

利用

$$\frac{am^2+2bmn+cn^2}{m^2+n^2}$$

有极小値的性质,可得結果.

例 4. 命

$$a_{m,n}=\begin{cases}1 & 若\quad m=n+1\quad (n\geqslant 1)\\ -1 & 若\quad m=n-1\quad (n\geqslant 2)\\ 0 & 若\quad 不然,\end{cases}$$

則

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\neq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}.$$

例 5. 若 $m,n\geqslant 1$ 及

$$a_{m,n}=\frac{1}{m^2-n^2}\,(若\ m\neq n),\quad a_{mn}=0(若\ m=n),$$

則

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}=-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\left(=\frac{\pi^2}{8}\right),$$

而

$$(a_{11})+(a_{12}+a_{21})+(a_{13}+a_{22}+a_{31})+\cdots=0.$$

例 6.

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{m^2}}{1-\frac{1}{m}}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)}=1.$$

例 7. 証明

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)},\tag{3}$$

幷由此与

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$$

推出

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}. \tag{4}$$

証. 因为 a_{mn} 有正有負，所以等式 (3) 无法从前面的定理推出，而需特殊的証明。(3)式左方显然等于(命 $r=m+n$)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\frac{3}{2}}+\frac{2}{\frac{5}{2}}-\cdots\right)^2=$$

$$=16\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)^2=\pi^2.$$

又对每一 $n\neq 0$,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{(-1)^n}{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{m+n+\frac{1}{2}}\right)=0,$$

所以如果 (3) 式成立，则得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}=\pi^2,$$

由此不难推出 (4) 式。

对于任何 N，我們有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-N}^{N}=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty},$$

所以我們只須証明当 $N\to\infty$ 时，有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\to 0,\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{-N-1}\to 0.$$

这里我們只証明前一个和趋于 0，另一个和趋于 0 的事实可同样証明之。

当 $m\geqslant -N-1$ 时，我們有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}\right|<\frac{1}{m+N+\frac{3}{2}}.$$

所以

$$\left|\sum_{m=-N-1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\right|\leqslant\sum_{m=-N-1}^{\infty}\frac{1}{\left|m+\frac{1}{2}\right|\left(m+N+\frac{3}{2}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{-N-1\leqslant m\leqslant -\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{1}{2}N\left(m+N+\frac{3}{2}\right)}+$$

$$+\sum_{-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}<m\leqslant N}\frac{1}{\frac{1}{2}N\left|m+\frac{1}{2}\right|}+\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2},$$

它显然趋向于 0. 又对任何 m,我們有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}-\sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}=$$

$$=(-1)^m\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}}-\sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}=(-1)^m\pi-\sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}},$$

所以

$$\sum_{m=-\infty}^{-N-2}\sum_{n=N+1}^{\infty}=\pi\sum_{m=-\infty}^{-N-2}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}}-\sum_{m=-\infty}^{-N-2}\sum_{n=+\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}.$$

右方前一項显然趋向于 0,而后一項可与前面同样处理,而証明它也趋于 0,于是 (3) 式成立.

§ 19. 級数的乘积

设

$$a_0+a_1+a_2+\cdots,\quad b_0+b_1+b_2+\cdots$$

为二个級数,命 $c_n=\sum_{p+q=n}a_pb_q=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$, 称級数

$$c_0+c_1+c_2+\cdots$$

为这两級数的乘积.

若级数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ 都絕对收斂,則乘积 $\sum c_n$ 也絕对收斂, 并且它的和 c 也就是该二級数之和 a, b 的乘积 ab.

这可由上节結果立刻推出, 因为重級数 $\sum a_nb_m$ 絕对收斂,先依行加起, 再依列加起的結果等于 ab. 而

$$\sum_{n=0}^{N}c_n=\sum_{m+n\leqslant N}a_mb_n,$$

这也是一种求和方法,所以它的极限也是 ab. 实际講来,我們还有进一步的結果.

定理 1. 如果 $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ 各收斂于 a, b, c, 則 $c=ab$.

証. 我們已知,当 $|r|<1$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}b_nr^n$$

絕对收斂,所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^n$$

也絕对收斂. 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 收斂,所以用 Abel 定理得到

$$\lim_{r\to1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n=a,\ \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}b_nr^n=b,\ \lim_{r\to1}\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n.$$

級数乘法的定义并不唯一，以上的一种称为 Cauchy 乘法。

还有一种称为 Dirichlet 乘法，定义如次：

$$c_n' = \sum_{pq=n} a_p b_q, \quad n = 1, 2\cdots.$$

也是可以証明如果 $\sum a_p$, $\sum b_q$ 都絕对收于 a, b, 則

$$\sum c_n'$$

也絕对收斂于 ab.

Cauchy 乘法的定义导源于冪級数的乘法，而 Dirichlet 乘法的定义导源于 Dirichlet 級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

的乘法：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{(mn)^s} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{n,m=l} a_n b_m.$$

例 1 (Lambert 級数). 考虑級数

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{1-x^k}. \tag{1}$$

假定

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

当 $0 < x < \rho(<1)$ 时收斂，則 Lambert 級数 (1) 也收斂.

因此

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} x^{lk} = \sum_{m=1}^{\infty} x^m \sum_{lk=m} a_k$$

分別取 $a_k = 1$ 及 $a_k = k$, 則得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n,$$

此处 $d(n)$ 表示 n 的因子个数，而 $\sigma(n)$ 表示 n 的各个因子之和.

例 2. 命

$$\varphi(x, z) = e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})}, \quad z \neq 0.$$

由

$$e^{\frac{x}{2}z} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{z^m}{m!}, \quad e^{-\frac{x}{2}z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{2}\right)^k \frac{z^{-k}}{k!}$$

可知

$$\varphi(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k}\frac{(-1)^k}{m!k!}z^{m-k} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n,$$

此处

$$J_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, & 若 \quad n \geqslant 0. \\ \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, & 若 \quad n < 0. \end{cases}$$

易見

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

函数 $J_n(x)$ 称为 Bessel 函数.

例 3. 命

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m.$$

是两个在 $|x| < 1$ 內絕对收斂的級数.

由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m x^{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m f(x^m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n),$$

取 $a_m = \alpha^m$, $b_m = 1$, 卽得

$$f(x) = \frac{\alpha x}{1-\alpha x}, \quad g(x) = \frac{x}{1-x},$$

卽得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha x^m}{1-\alpha x^m} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n x^n}{1-x^n}.$$

§ 20. 多变数的冪級数

依变数 x, y 的正整数冪次排列的形如

$$\sum_{l,k=0}^{\infty} a_{lk}x^l y^k \quad (x, y \text{ 为复数或实数}) \tag{1}$$

的重級数,叫做两变数 x, y 的冪級数. 我們現在来討論重冪級数的收斂范围. 收斂范围的研究有很多地方不与单变数的相同,但仍有

定理 1. 如果在 $x = x_0$, $y = y_0$ 时級数收斂,則当

$$|x| < |x_0|, \quad |y| < |y_0|$$

时級数也收斂.

証. 由于重級数收斂,所以有一数 L 存在,使

$$|a_{lk}x_0^l y_0^k| < L.$$

而如果 $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$, 則

$$|a_{lk}x^l y^k| \leqslant |a_{lk}x_0^l y_0^k|\left|\frac{x}{x_0}\right|^l\cdot\left|\frac{y}{y_0}\right|^k.$$

卽得

$$\sum |a_{lk}x^l y^k| \leqslant L \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^l\left|\frac{y}{y_0}\right|^k.$$

右边是收斂的，所以得到定理.

从这儿也許有人会推測两变数的冪級数的收斂范围可能是 $|x| < R_1, |y| < R_2$. 这一猜測是錯誤的.

定义. 如果 $\mathfrak{M}$ 是两个复数 x, y 的区域，在其中各点上，冪級数 (1) 都收斂，而在其外各点上，重級数发散，在边界点上可能发散也可能收斂. 这样的区域称为重級数 (1) 的收斂范围.

例 1. 級数

$$\sum_{l,k=0}^{\infty} x^l y^k$$

的收斂范围是 $|x| < 1, |y| < 1$.

例 2.

$$\sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{x^l y^k}{l!k!}$$

无处不收斂.

例 3.

$$\begin{aligned}\sum_{l\geqslant k}^{\infty} x^l y^k &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^m + \cdots + xy + x^2y + x^3y \\ &\quad + \cdots + x^my + \cdots + x^2y^2 + x^3y^3 + \cdots \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots)[1 + xy + (xy)^2 + \cdots] \\ &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-xy}.\end{aligned}$$

这級数的收斂范围是 $|x|<1$, $|xy|<1$.

§ 21. 利用級数解隐函数

我們再研究隐函数的解出問題：假定

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

的左方在 (x_0, y_0) 点的一邻域內能依 $x - x_0$ 与 $y - y_0$ 的冪次展成为絕对收斂級数，并假定其常数項 $=0$，而 $y-y_0$ 項的系数不为 0，这两条件相当于 $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 于是被方程 (1) 所确定了的函数 $y = y(x)$ 也能在 $x - x_0$ 的某一邻域內展成为 $x - x_0$ 的冪級数.

証. 并不失去普遍性，我們可以假定 $x_0 = y_0 = 0$. 由于冪級数中 y 的系数 $\neq 0$，所以方程 (1) 可以改写成为

$$y = c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3 + \cdots. \tag{2}$$

我們所寻求的是找出

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots, \tag{3}$$

使其适合于(2).

首先我們假定(3)的絕对收斂性,并把(3)代进(2)得

$$\begin{aligned} a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{11}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots) + \\ + c_{02}(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2(a_1x + a_2x^2 + \cdots) + \\ + c_{12}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 + c_{03}(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{4}$$

再比較系数得

$$\begin{aligned} &a_1 = c_{10}, \\ &a_2 = c_{20} + c_{11}a_1 + c_{02}a_1^2, \\ &a_3 = c_{11}a_2 + 2c_{02}a_1a_2 + c_{30} + c_{21}a_1 + c_{12}a_1^2 + c_{03}a_1^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned} \tag{5}$$

(2)式右边有一特点,其中含有 y 的項或者是 y 的高于1次的項,或者1次的 y,此时其对应系数都含有 $x^l(l \geqslant 1)$,因此在方程組(5)的第 n 个方程中,左边一定是 a_n,而右边則是 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 的函数. 由此保証能够依次地逐个确定系数 a_n:

$$\begin{aligned} &a_1 = c_{10}, \\ &a_2 = c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2, \\ &a_3 = (c_{11} + 2c_{02}c_{10})(c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2) + c_{30} + c_{21}c_{10} + c_{12}c_{10}^2 + c_{03}c_{10}^3, \cdots. \end{aligned} \tag{6}$$

顺便提一下,(4)中破除括弧时,字母 a, c 只用了加、乘的計算,所以如果把(5)式右端看成 c, a 多項式,它的系数都是正的(并且还是自然数). 于是(6)中右端的系数也是正的,这一注解后来有用.

我們現在的問題归結为去証明:系数为由(6)式定义的 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 的冪級数(3),在 $x = 0$ 的某一邻域中絕对收斂. 因此这个冪級数适合于(2)式.

与研究(2)式的同时,我們研究

$$y = r_{10}x + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2 + r_{30}x^3 + r_{21}x^2y + r_{12}xy^2 + r_{03}y^3 + \cdots, \tag{2'}$$

其中所有的系数 r_{ij} 都是正的,且

$$|c_{ij}| \leqslant r_{ij}.$$

我們对应的定义

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = r_{10}, \\ &\alpha_2 = r_{20} + r_{11}r_{10} + r_{02}r_{10}^2, \\ &\alpha_3 = (r_{11} + 2r_{02}r_{10})(r_{20} + r_{11}r_{10} + r_{02}r_{10}^2) + \\ &\qquad + r_{30} + r_{21}r_{10} + r_{12}r_{10}^2 + r_{03}r_{10}^3, \cdots \end{aligned} \tag{6'}$$

及冪級数

$$y = \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \cdots. \tag{3'}$$

由于系数都是正的,所以

$$|a_n| \leqslant \alpha_n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

如果能够找到(2′),使(3′)有非零收斂半径,定理就証明了.

由假定，有 r 与 ρ 存在，使当

$$|x| < r, \quad |y| < \rho$$

时，(2) 式收斂，所以有 M 使

$$|c_{ij}x^iy^j| \leqslant M,$$

即得

$$|c_{ij}| \leqslant \frac{M}{r^i\rho^j}.$$

就命 $r_{ij} = M/r^i\rho^j$，則 (2′) 就是

$$y = \frac{M}{r}x + \frac{M}{r^2}x^2 + \frac{M}{r\rho}xy + \frac{M}{\rho^2}y^2 + \cdots$$

$$= \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)} - M - \frac{M}{\rho}y.$$

即得

$$y^2 - \frac{\rho^2}{\rho + M}y + \frac{M\rho^2}{\rho + M}\cdot\frac{x}{r - x} = 0.$$

这方程的函数可以实际解出，但我們仅需使 $x = 0$，$y = 0$ 的那一个根，即

$$y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4M(\rho + M)}{\rho^2}\frac{x}{r - x}}\right].$$

引进

$$r_1 = \frac{r\rho^2}{\rho^2 + 4M(\rho + M)}$$

来化簡表达式，則得

$$y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)}\left[1 - \left(1 - \frac{x}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

由此可以看出，如果利用二項函数的級数，y 可依 x 的冪次展开，且当 $|x| < r_1 < r$ 时絕对收斂. 也就是說，(3′) 收斂，因而 (3) 絕对收斂.

以上的方法称为“优函数法”，在微分方程論中常用及之.

这結果的一个重要特例是逆函数，如果

$$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n\cdots$$

且 $a_1 \neq 0$，則依以上的方法可以得出一冪級数

$$x - x_0 = b_0(y - y_0) + b_2(y - y_0)^2 + \cdots.$$

这也是一个在某确定范围內收斂的冪級数，詳細算法已見第七章. 而現在說明了所求出的級数在 y_0 附近收斂.

这些結果都是所謂“局部”性的，仅知道在某一点附近，而不知确是多么近，或多么远.

例 1 (Lagrange 級数). 討論方程

$$y = a + x\varphi(y), \tag{7}$$

此处 $\varphi(y)$ 在 $y = a$ 点附近能展开为收斂的冪級数.

当 $x=0$ 时，$y=a$. 我們可以用冪級数解出 y 来. 更一般地，我們研究下面的間題.

若 $u=f(y)$ 在 $y=a$ 附近有收斂的冪級数，将 y 在 $x=0$ 处的冪級数代入，则 u 在 $x=0$ 附近有收斂的冪級数. 現在我們来求 u 依照 x 的冪次的展开式.

将 (7) 式分别对 x 及 a 求微商，得

$$[1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y),$$

$$[1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a}=1.$$

由此得到

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a}. \tag{8}$$

故对于 $u=f(y)$，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a}=\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a}. \tag{9}$$

于是对于任何可微函数 $F(y)$，由 (8)，(9) 不难推出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{10}$$

現在我們用归納法来証明

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right], \tag{11}$$

当 $n=1$ 时，此即 (9) 式. 假定对于不超过 n 的自然数，(11) 式正确. 当 $n+1$ 时，由 (9)，(10) 可知

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]$$

$$=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

故 (11) 式成立.

現在将 u 展成以 x 为冪的 Taylor 級数:

$$u=u_0+x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0+\cdots.$$

由 (11) 可知，

$$\left.\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_0=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)f'(a)],$$

故得

$$f(y)=f(a)+x\varphi(a)f'(a)+\frac{x^2}{2!}\frac{d}{da}[\varphi^2(a)f'(a)]+\cdots$$

$$+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}(\varphi^n(a)f'(a))+\cdots, \tag{12}$$

此即 Lagrange 級数.

取 $f(y)=y$，即得

$$y=a+x\varphi(a)+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{d}{da}[\varphi^2(a)]+\cdots+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)]+\cdots. \tag{13}$$

例 2. 在例 6.1.4 中已經討論过确定行星在它軌道上的位置的 Kepler 方程

$$x=q\sin x+\alpha,$$

此处 x 是行星的偏近角点、α 是平均近角点，而 q 是行星軌道离心率．由 (13) 可知，

$$x=\alpha+q\sin\alpha+\frac{q^2}{2!}\frac{d\sin\alpha}{d\alpha}+\cdots+\frac{q^n}{n!}\cdot\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}(\sin^n\alpha)+\cdots.$$

Laplace 首先証明了当 $q<0.6627\cdots$ 时，上面的級数收斂．

習題 1. 試証

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^k=1-k\cdot\frac{x}{4}+\frac{k(k+3)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2-$$
$$-\frac{k(k+4)(k+5)}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3+\cdots.$$

提示：取 $a=1$，$\varphi(y)=\frac{1}{4y}$，$f(y)=y^{-k}$．

習題 2. 求証

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ax+a^2}}=1+aX_1+a^2X_2+\cdots+a^nX_n+\cdots,$$

此处 $X_n=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ 为 n 次 Legendre 多項式(見 § 6.13)．

提示：取 $\varphi(y)=\frac{y^2-1}{2}$．

§ 22. 常微分方程的解的存在性与唯一性

定理 1 (Cauchy). 假定 $f(x,y)$ 在区域

$$(D)\qquad |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b\quad (a>0,\ b>0)$$

上連續，且滿足 Lipschtz 条件

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant K|y_2-y_1|,$$

此处 K 为正常数，則微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

有唯一的解答 $y=\varphi(x)$，确定于区間 $|x-x_0|\leqslant h$ 中，其中

$$h=\min\left(a,\frac{1}{2K},\frac{b}{M}\right),\quad M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|,$$

且 $y_0=\varphi(x_0)$.

証. 方程 (1) 的任何解 $y=y(x)$ 皆滿足

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y(\xi))d\xi. \tag{2}$$

反之,(2) 的任何連續解都滿足 (1) 及初始条件 $y_0 = y(x_0)$. 因此我們就来討論积分方程 (2).

把 $y(\xi) \equiv y_0$ 代入 (2) 式右方,得

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0) d\xi.$$

显然, $y_1(x)$ 当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时是連續的,且 $y_1(x_0) = y_0$. 由于

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \max_{|\xi - x_0| \leqslant h} |f(\xi, y_0)| h \leqslant Mh \leqslant b,$$

y_1 也沒有超越 D 之外,仿此依次做出

$$\begin{cases} y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi)) d\xi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3}$$

于是我們得到函数貫

$$y_0, y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x), \cdots, \tag{4}$$

其中每一函数 $y_n(x)$ 都具有上述性质.

我們来証明:当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时,函数貫 (4) 一致收斂. 为此,先証明

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n. \tag{5}$$

当 $n = 1$ 时,

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0) d\xi \right| \leqslant M |x - x_0|.$$

用归納法,假定 (5) 当 $n = k$ 时成立,則当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, y_k(\xi)) - f(\xi, y_{k-1}(\xi))] d\xi \right| \\ &\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_k) - f(\xi, y_{k-1})| d\xi \right| \\ &\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |y_k - y_{k-1}| d\xi \right| \leqslant \frac{MK^k}{k!} \left| \int_{x_0}^{x} |\xi - x_0|^k d\xi \right| \\ &= \frac{MK^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}. \end{aligned}$$

故得 (5) 式.

由于級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{MK^{k-1}}{k!} h^k$$

收斂,所以級数

$$Y(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots$$

在 $|x - x_0| \leqslant h$ 中一致收斂,即函数貫 (4) 在 $|x - x_0| \leqslant h$ 中一致收斂于 $Y(x)$.

又由于

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi, Y)-f(\xi, y_n)]d\xi\right| \leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|Y-y_n|d\xi\right|,$$

故当 $n\to\infty$ 时，

$$Y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi, y_{n-1}(\xi))d\xi\right]=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi, Y(\xi))d\xi,$$

即 $Y(x)$ 适合 (2) 及初始条件 $Y(x_0)=y_0$. 倘有另一連續解 $Z(x)$，則

$$Z(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi, Z)d\xi,$$

故得

$$\max_{|x-x_0|\leqslant h}|Y(x)-Z(x)|=\max_{|x-x_0|\leqslant h}\left|\int_{x_0}^{x}(f(\xi, Y)-f(\xi, Z))d\xi\right|$$

$$\leqslant K\max_{|x-x_0|\leqslant h}|Y(x)-Z(x)|h\leqslant\frac{1}{2}\max_{|x-x_0|\leqslant h}|Y(x)-Z(x)|,$$

因此必須 $Y(x)\equiv Z(x)$. 定理証完.

附記. 由

$$|Y(x)-y_m(x)|\leqslant\sum_{k=m}^{\infty}\frac{MK^k}{(k+1)!}|x-x_0|^{k+1}$$

可以估計第 m 次近似值 $y_m(x)$ 与准确解之間的誤差.

例. 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \quad (|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1)$$

过 $(0, 0)$ 的近似解.

显然函数 x^2+y^2 适合 Lipschtz 条件，积分一下得

$$y(x)=\int_0^x[t^2+y^2(t)]dt=\frac{x^3}{3}+\int_0^x y^2(t)dt.$$

以 $y_0(x)=0$ 代入，則得

$$y_1(x)=\frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x)=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x\frac{1}{9}t^6dt=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7,$$

$$y_3(x)=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x\left(\frac{1}{9}t^6+\frac{2}{189}t^{10}+\left(\frac{1}{63}\right)^2t^{14}\right)dt$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7+\frac{2}{11\cdot189}x^{11}+\frac{1}{15\cdot63^2}x^{15},$$

可以継續算出諸 $y_4(x), y_5(x), \cdots$.

§ 23. 积分方程解的存在性与唯一性

定理 1. 假定 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的連續函数，$K(x, \xi)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant\xi\leqslant b$ 上連續，則当 λ 充分小时，积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

在 $[a, b]$ 上有唯一的連續解 $\varphi(x)$.

証. 任取 $[a, b]$ 上的連續函数 $\varphi_0(x)$, 則由

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)d\xi$$

所确定的函数 $\varphi_1(x)$ 亦是 $[a, b]$ 上的連續函数. 依次类推,作出

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_{n-1}(\xi)d\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

于是我們得到 $[a, b]$ 上的連續函数貫 $\{\varphi_n(x)\}$. 命

$$M = \max_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant \xi\leqslant b}} |K(x,\xi)|, \quad N = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)|, \tag{1}$$

則得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leqslant [\lambda M(b-a)]^{n-1}N. \tag{2}$$

因当 $n=1$ 时, (2)式已成立. 由归納法,假定 $n=k$ 时(2)式成立, 則当 $n=k+1$ 时,

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leqslant \lambda\int_a^b |K(x,\xi)||\varphi_k(\xi) - \varphi_{k-1}(\xi)|d\xi$$
$$\leqslant \lambda M(b-a)[\lambda M(b-a)]^{k-1}N = [\lambda M(b-a)]^k N.$$

故得 (2) 式.

取 λ 充分小. 使 $0 < \lambda M(b-a) < 1$, 則由于級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda M(b-a))^k$$

收斂,可知級数

$$\varphi_1(x) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + \cdots + (\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(x)) + \cdots = \varphi(x)$$

一致收斂,即函数貫 $\{\varphi_n(x)\}$ 一致收斂于連續函数 $\varphi(x)$. 因此

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_{n-1}(\xi)d\xi\right]$$
$$= f(x) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

倘还有另一連續函数 $\psi(x)$ 适合积分方程,則

$$\psi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)\psi(\xi)d\xi,$$

故得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi(x) - \psi(x)| = \lambda \max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^b K(x,\xi)[\varphi(\xi) - \psi(\xi)]d\xi\right|$$
$$\leqslant \lambda M(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

因此必須 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. 定理証完.

§ 24. 微分方程組的解的存在性与唯一性

定理 1. 給定一組原始值 $x_0, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)}$, 又假定 1) 函数 $f_i(x_1, y_1, \cdots, y_n)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 在閉区域

$$(D) \qquad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y_i - y_i^{(0)}| \leqslant b \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

上連續, M 为諸函数在 (D) 中絕对值的最大值, 即对于 D 中的点有 $|f_i| \leqslant M(1 \leqslant i \leqslant n)$; 2) 在区域 D 內, 这些函数适合 Lipschtz 条件, 即

$$|f_i(x_1 y_1' \cdots y_n') - f_i(x_1 y_1'', \cdots, y_n'')| \leqslant K\{|y_1' - y_1''| + \cdots + |y_n' - y_n''|\},$$

此处 K 为一正常数, 則微分方程組

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x_1 y_1, \cdots, y_n) \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{1}$$

有唯一的一組解

$$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x),$$

它們确定于区間 $|x - x_0| \leqslant h$ 中, 此处 $h = \min\left(a, \frac{1}{2nK}, \frac{b}{M}\right)$ 且滿足

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \quad \cdots, \quad y_n(x_0) = y_n^{(0)}.$$

証. 1) 作一次逼近函数

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)}) d\xi \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{2}$$

諸 $y_i^{(1)}(x)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都是連續函数, 又当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时,

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)}) d\xi\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

因此一次逼近函数不会超出区域 D. 类似地, 逐步定义

$$y_i^{(2)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(1)}, \cdots, y_n^{(1)}) d\xi, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(m-1)}, \cdots, y_n^{(m-1)}) d\xi, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

用归納法可以証明, 当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时, $|y_i^{(m)} - y_i^{(0)}| \leqslant b(m = 1, 2, \cdots)$.

2) 今往証明

$$|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)| \leqslant M(nK)^{m-1} \frac{|x - x_0|^m}{m!} \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{3}$$

当 $m = 1$ 时

$$|y_i^{(1)} - y_i^{(0)}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)}) d\xi\right| \leqslant M|x - x_0| \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

假定 (3) 式当 $m = k$ 时成立, 則当 $m = k + 1$ 时,

$$|y_i^{(k+1)}(x) - y_i^{(k)}| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} [f_i(\xi, y_1^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)}) - f_i(\xi, y_1^{(k-1)}, \cdots, y_n^{(k-1)})] d\xi\right|$$

$$= M(nK)^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

故得(3)式. 又因級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} M(nK)^{m-1}\frac{h^m}{m!}$$

收斂,所以級数

$$y_i^{(0)}+(y_i^{(1)}(x)-y_i^{(0)})+\cdots+(y_i^{(m)}(x)-y_i^{(m-1)}(x))+\cdots=Y_i(x)$$
$$(1\leqslant i\leqslant n)$$

在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上一致收斂,即貫 $\{y_i^{(m)}(x)\}$ 一致收斂于 $Y_i(x)(1\leqslant i\leqslant n)$.

由于

$$\left|\int_{x_0}^{x}\{f_i(\xi,y_1^{(m)},\cdots,y_n^{(m)})-f_i(\xi,Y_1,\cdots,Y_n)\}d\xi\right|$$
$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}\{|y_1^{(m)}-Y_1|+\cdots+|y_n^{(m)}-Y_n|\}d\xi\right|,$$

所以

$$Y_i=\lim_{m\to\infty}y_i^{(m)}=\lim_{m\to\infty}\left[y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,y_1^{(m-1)},\cdots,y_n^{(m-1)})d\xi\right]$$
$$=y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,Y_1,\cdots,Y_n)d\xi\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

将两端对 x 求微商,得

$$\frac{dY_i}{dx}=f_i(x,Y_1(x),\cdots,Y_n(x))\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

且

$$y_i(x_0)=y_i^{(0)}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

倘方程組(1)还有另一組解 $Z_1,\cdots Z_n$, 則

$$Z_i=y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,Z_1,\cdots Z_n)d\xi\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

命

$$\max_{|x-x_0|\leqslant h}[|Y_1(x)-Z_1(x)|+\cdots+|Y_n(x)-Z_n(x)|]=\theta,$$

則得

$$|y_i-Z_i|=\left|\int_{x_0}^{x}[f_i(\xi,Y_1,\cdots,Y_n)-f_i(\xi,Z_1,\cdots,Z_n)]d\xi\right|$$
$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{l=1}^{n}|Y_l(\xi)-Z_l(\xi)|\right|d\xi\leqslant h\theta K\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

将这 n 个不等式相加,則得

$$\theta\leqslant nhK\theta.$$

此不可能,除非 $\theta=0$, 卽 $Z_i(x)\equiv y_i(x)\quad(1\leqslant i\leqslant n)$. 故得定理.

考虑一般的 n 阶微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}=F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).\tag{4}$$

这与以下的微分方程組是等价的:

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\quad\frac{dy_1}{dx}=y_2,\cdots,\frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1}$$
$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=F(x,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}).$$

所以由定理(1)得到

定理 2. 若 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 对于所有的变数連續，而对于 $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 适合 Lipschtz 条件，則微分方程(4)有唯一的解适合原始条件，当 $x = x_0$ 时，$y = y_0$，$y' = y'_0, \cdots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$.

§25. 压縮映象原理

定理 1. 假定 $\{\varphi\}$ 为集合 $\mathfrak{M}$ 上的函数族，滿足：

1）每一函数 φ 都在 $\mathfrak{M}$ 上有界，即

$$|\varphi| \leqslant M_\varphi,$$

此处 M_φ 是与 φ 有关的常数；

2）$\{\varphi\}$ 中任何一个一致收斂的函数貫的极限，亦是这函数族中的函数；

3）$\{\varphi\}$ 上有一运算 A，$A(\varphi)$ 将 φ 变为 $\{\varphi\}$ 中某一函数；

4）存在适合 $0 \leqslant m < 1$ 的常数 m，使 $\{\varphi\}$ 中任意二函数 φ_1, φ_2 都滿足条件

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leqslant m \underset{\mathfrak{M}}{\overline{Bd}} |\varphi_2 - \varphi_1|,$$

則方程

$$\varphi = A(\varphi)$$

在 $\{\varphi\}$ 中有唯一的解.

証. 在 $\{\varphi\}$ 中任取一个函数 φ_0，作出

$$\varphi_1 = A(\varphi_0).$$

由 3) 可知，$\varphi_1 \in \{\varphi\}$. 依次类推，作出 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots$，由 4) 知，$\{\varphi_i\}$ 一致收斂，由 2) 知，其极限即为所要求的 φ.

由压縮映象原理立刻可以推出与唯一性有关的結果.

例如，命 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的連續函数，$K(x, \xi)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$ 上連續，命 $\mathfrak{M}$ 为閉区間 $[a, b]$，$\{\varphi\}$ 为 $[a, b]$ 上的連續函数的全体：

$$A(\varphi) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

則当 λ 充分小时，由压縮映象原理可知，积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

在 $[a, b]$ 上有唯一的連續解.

習題 1. 試由压縮映象原理推出定理 7.1 与定理 8.1.

習題 2. 假定 $f(x)$ 在 $-\infty < x < \infty$ 上定义，且对任何实数 x_1, x_2，皆滿足

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K|x_2 - x_1|,$$

此处 $K < 1$ 为常数，則方程

$$x = f(x)$$

有唯一的解.

習題 3. 試推广压縮映象原理,使之能包含定理 10.1.

§ 26. 利用冪級数解微分方程

§ 21 的优函数法可以用来証明微分方程解的存在性.

定理 1 (Cauchy). 假定 $f(x, y)$ 在 $x = x_0$, $y = y_0$ 的一个邻域內可以展开为收斂的冪級数,則微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

有一个解 $y = y(x)$, 它适合于 $y_0 = y(x_0)$,而且在 x_0 的邻域內 y 可以展开为冪級数(这是通过 (x_0, y_0) 的唯一解).

具体些,取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 我們的假定是

$$f(x, y) = \sum_{l,m=0}^{\infty} a_{l,m} x^l y^m, \quad |x| \leqslant r \quad |y| \leqslant \rho, \tag{2}$$

在此假定下,微分方程 (1) 有唯一的解

$$y = \sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l, \tag{3}$$

这級数当

$$|x| < r(1 - e^{-\rho/2Mr})$$

时收斂,此处 M 是一个与 $f(x, y)$ ($|x| \leqslant r$, $|y| \leqslant \rho$) 有关的常数.

証. 以 (3) 代入 (1) 得

$$\sum_{l=1}^{\infty} l c_l x^{l-1} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots$$

$$= a_{00} + a_{10}x + a_{01}\left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l\right) + a_{20}x^2 + a_{11}x\left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l\right) + a_{02}\left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l\right)^2 + \cdots.$$

比較系数得

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{00}, \\ 2c_2 &= a_{10} + a_{01}c_1, \\ 3c_3 &= a_{01}c_2 + a_{20} + a_{11}c_1 + a_{02}c_1^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

这是一种算法,經过"加"、"乘",可以逐个地算出 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ 来.

由于

$$\sum_{l,m=0}^{\infty} a_{l,m} r^l \rho^m$$

收斂,故有 M 存在,使

$$|a_{l,m}| r^l \rho^m \leqslant M, \quad 或即 \quad |a_{l,m}| \leqslant \frac{M}{r^l \rho^m}.$$

因此得出函数 $f(x, y)$ 的优函数

$$\sum_{l,m=0}^{\infty}\frac{M}{r^l\rho^m}x^ly^m=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}.$$

微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}$$

有解

$$y-\frac{y^2}{2\rho}=-rM\log\left(1-\frac{x}{r}\right)+c,$$

由于当 $x=0$ 时，$y=0$，所以得出 $c=0$. 解这二次方程得

$$y=\rho\left(1\pm\sqrt{1+\frac{2Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right).$$

又因 $x=0$ 时，$y=0$，我們得一根

$$y=\rho\left(1-\sqrt{1+\frac{2Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right). \tag{4}$$

当 $\frac{2Mr}{\rho}\left|\log\left(1-\frac{x}{r}\right)\right|<1$，也就是当

$$|x|<r(1-e^{-\frac{\rho}{2Mr}})$$

时，(4) 可以展成 x 的冪級数，而这冪級数是方程 (1) 的解的优函数.

§27. 微分方程組

現在考虑

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, \cdots, y_n) \qquad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{1}$$

假定在点 $(x_0, (y_1)_0, \cdots, (y_n)_0)$ 的一个邻域內，f_i 都可以表为收斂的冪級数，則此微分方程組有一个解，当 $x=x_0$ 时，有

$$y_1=(y_1)_0, \cdots, \quad y_n=(y_n)_0,$$

且在 $x=x_0$ 的某一邻域中，它表成为冪級数.

不妨假定 $x_0=0$, $(y_1)_0=0, \cdots, (y_n)_0=0$，命

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_n)=\sum_{l, m_1, \cdots, m_n=0}^{\infty}a_{l,m_1,\cdots,m_n}^{(i)}x^ly_1^{m_1}, \cdots, y_n^{m_n}$$

在 $|x|\leqslant r$, $|y_i|\leqslant\rho$ 中收斂.

以

$$y_i=\sum_{l=1}^{\infty}c_l^{(i)}x^l$$

代入 (1)，比較系数，易見这也是可以仅用加乘就能逐步定出 $c_l^{(1)}, \cdots, c_l^{(n)}\cdots(l=1, 2, \cdots)$ 的計算方法.

与上节同法，有M存在，使

$$|a^{(i)}_{l,m_1,\cdots,m_n}|r^l\rho^{m_1+\cdots+m_n}\leqslant M.$$

因此f_i有优函数

$$\sum_{l,m_1,\cdots,m_n=0}^{\infty}\frac{M}{r^l\rho^{m_1+\cdots+m_n}}x^l y_1^{m_1}\cdots y_n^{m_n}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y_1}{\rho}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{\rho}\right)}.$$

求方程

$$\frac{dy_1}{dx}=\cdots=\frac{dy_n}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y_1}{\rho}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{\rho}\right)}$$

的解．因当$x=0$时，$y_1=\cdots=y_n=0$，故显見$y_1=y_2=\cdots=y_n$，所以得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^n}.$$

解此方程得

$$y=\rho-\rho\sqrt[n+1]{1+\frac{(n+1)Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)},$$

当$|x|<r(1-e^{-\rho/(n+1)Mr})$时，它可以展开为冪級数．这是方程(1)的解答的优函数．

附記．考虑一般性的微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}=F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

这与以下的方程組等价：

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\quad \frac{dy_1}{dx}=y_2,\cdots,\quad \frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1}$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=F(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}).$$

所以得以下的．

定理． 如果F在$x=x_0$, $y=y_0$, $y'=(y')_0$, $\cdots$, $y^{(n-1)}=(y^{(n-1)})_0$的附近可以展开为冪級数，則該微分方程有一个解：当$x=x_0$时，有$y=y_0$, $y'=(y')_0$, $\cdots$, $y^{(n-1)}=(y^{(n-1)})_0$，且在$x=x_0$的某一邻域內可以表为冪級数．

§28. 偏微分方程

定理1（Cauchy–Ковалевская）．假定$\varphi(y)$在y_0附近有收斂的冪級数，且$\varphi(y_0)=z_0$, $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=y_0}=q_0$，函数

$$f(x,y,z,q)$$

在x_0, y_0, z_0, q_0附近有收斂的冪級数，則方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

有一解$z=z(x,y)$，它在(x_0,y_0)附近可以展开成收斂的冪級数，而且$z(x_0,y)=\varphi(y)$．

証. 1) 簡化. 作代換 $X = x - x_0$、$Y = y - y_0$，故我們可以假定 $x_0 = y_0 = 0$. 又命 $Z = z - \varphi(y)$，故可以假定 $\varphi(y) \equiv 0$. 作了这些代換之后，$Z(0,y) = z(0,y) - \varphi(y) \equiv 0$. 我們还可以假定 $f(0,0,0,0) = 0$，否則，假若 $f(0,0,0,0) = a$，那末命 $Z = z - ax$ 即可. 这样一来，問題就化为解下面的問題：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \sum\limits_{i,j,k,l=0}^{\infty} a_{i,j,k,l} x^i y^j z^k \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^l; \\ \quad \left(\begin{matrix} a_{0,0,0,0} = 0, \ |x| \leqslant r, \ |y| \leqslant r, \ |z| \leqslant r \\ \left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right| \leqslant \rho. \end{matrix}\right), \\ z(0, y) \equiv 0. \end{cases} \tag{1}$$

2) 冪級数展开. 命

$$z = \sum_{s=1}^{\infty} c_s(y) x^s,$$

代入 (1) 式得

$$\sum_{s=1}^{\infty} s c_s(y) x^{s-1} = \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} a_{ijkl} x^i y^j \left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s(y) x^s\right)^k \left(\sum_{t=1}^{\infty} c_t'(y) x^t\right)^l.$$

比較 x 的乘方的系数得

$$c_1(y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j00} y^j,$$

$$2c_2(y) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{1j00} y^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_{0j10} c_1(y) y^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_{0j01} c_1'(y) y^j$$

....

由于左端 x^s 的系数为 $(s+1)c_{s+1}(y)$，而右端 x^s 的系数則为 a_{ijkl} 与 $c_1(y), \cdots, c_s(y)$; $c_1'(y), \cdots, c_s'(y)$ 的正系数的多項式，故仅用加乘运算就可以逐步决定諸 $c_s(y)$. 由于 $c_1(y) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{0j00} y^j$，用归納法可知級数 $c_s(y)$ 的系数也是 a_{ijkl} 的正系数多項式.

3) 优函数. 由于級数

$$\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} a_{ijkl} r^i r^j r^k \rho^l$$

的收斂性，得知有 M 存在，使

$$|a_{ijkl}| \leqslant \frac{M}{r^{i+j+k} \rho^l},$$

因此

$$|a_{ijkl}| \leqslant \frac{(i+j+k)! M}{i! j! k! \alpha^i r^{i+j+k} \rho^l},$$

此处 α 是一小于 1 的正数. 于是我們得到 $f(x, y, z, q)$ 的优函数

$$\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \frac{(i+j+k)! M}{i! j! k! \alpha^i r^{i+j+k} \rho^l} x^i y^j z^k q^l - M$$

$$= M\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\frac{x}{\alpha}+y+z}{r}\right)\left(1-\frac{q}{\rho}\right)}-1\right]$$

(請注意引进 α 的作用)．因此問題就在于求証

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{M}{\left(1-\dfrac{\frac{x}{\alpha}+y+z}{r}\right)\left(1-\dfrac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\rho}\right)}-M \\ z(0,y)\equiv\sum_{m=1}^{\infty}a_m y^m, \quad a_m\geqslant 0\end{cases} \tag{2}$$

有一解，使它在 $(0,0)$ 附近可以展为 x,y 的冪級数，也就是如果給了一个非負系数的冪級数 $\sum a_m y^m$，而(2)在 $(0,0)$ 附近有一个 x,y 的冪級数的解，那末这个解就是(1)的解的优函数．因而証明了(1)的解的存在性．

我們且不去解偏微分方程(2)，而先考虑以下的常微分方程的問題，然后从下面的問題中給出(2)式中的 $\sum_{m=1}^{\infty}a_m y^m$，并且給出(2)式的一特解．

求出具有正系数的冪級数

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m t^m$$

(在 $t=0$ 附近收斂)，适合于

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{df}{dt}=\dfrac{M}{\left(1-\dfrac{f+t}{r}\right)\left(1-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{df}{dt}\right)}-M, \\ f(0)=0.\end{cases} \tag{3}$$

将(3)式改写成为

$$\frac{1}{\alpha\rho}\left(\frac{df}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)\left(\frac{df}{dt}\right)+\frac{M}{1-\frac{f+t}{r}}-M=0,$$

解得

$$\frac{df}{dt}=\frac{\alpha\rho}{2}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)^2-\frac{4M}{\alpha\rho}\left(\frac{t+f}{r}\right)\Big/\left(1-\frac{t+f}{r}\right)}\right]$$

$$=\frac{\alpha\rho}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)\left(1-\sqrt{1-w}\right), \tag{4}$$

这儿

$$w=\frac{4M\alpha\rho}{(\rho-\alpha M)^2}\left(\frac{t+f}{r}\right)\Big/\left(1-\frac{t+f}{r}\right).$$

由于当 $|w|<1$ 时

$$1-\sqrt{1-w}=\frac{1}{2}w+\frac{1}{2\cdot 4}w^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}w^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}w^4+\cdots.$$

因此当 α 充分小时,可使

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}>0$$

及(4)式右边可以展开为

$$t+f$$

的正系数幂級数. 由 § 26 的处理方法可知,(3)式有一个幂級数

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m t^m, \qquad a_m\geqslant 0$$

的解.

再回到原来的問題. 取

$$z=f\left(\frac{x}{\alpha}+y\right),$$

則方程(3)变为方程(2),而且

$$z(0,y)=f(y)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m y^m.$$

卽得所証.

至于深刻地理解幂級数的各种应用,必須有复变函数論的知識. 这里所講的,仅仅是个开头而已.

第十四章　曲綫的微分性质

§1. 矢量的微商

我們現在推广微分法到依賴于某一参变数 τ 的变矢量 $\mathbf{a}(\tau)$，也就是

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(\tau)=(a_1, a_2, a_3)$$

的对 x, y, z 軸的三个支量 a_1, a_2, a_3 都是 τ 的函数的情况．我們确定某一点 O 作为所有的这些矢量的起点，当参变数 τ 改变时，变矢量 $\mathbf{a}(\tau)$ 的另一端在空間画一条曲綫 (C)．

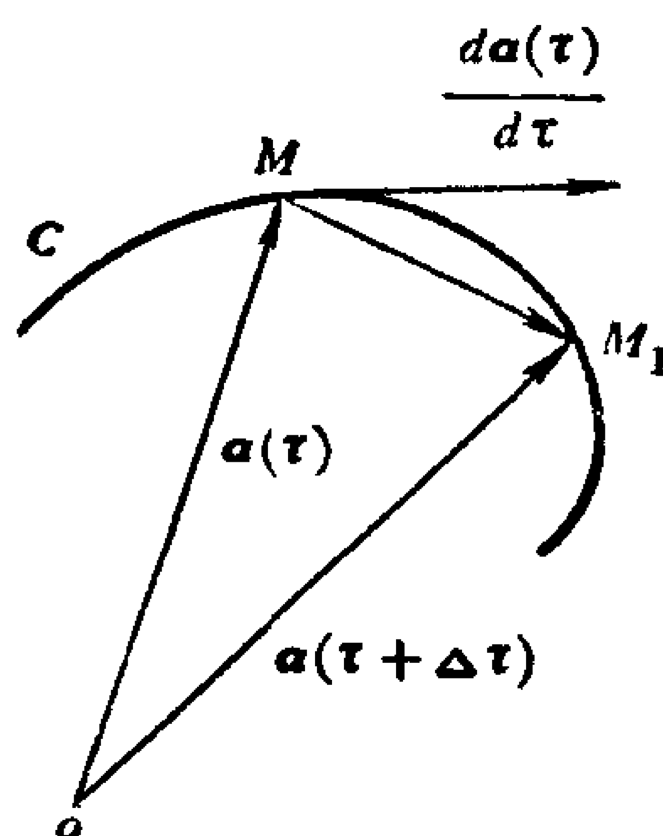


图 33

假定当参数取值 τ 与 $\tau+\Delta\tau$ 时，变矢量对应的位置是 OM 与 OM_1，綫段 MM_1 对应于矢量差

$$\mathbf{a}(\tau+\Delta\tau)-\mathbf{a}(\tau).$$

关系式

$$\frac{\mathbf{a}(\tau+\Delta\tau)-\mathbf{a}(\tau)}{\Delta\tau}$$

所得出的矢量是平行于 MM_1 的矢量，当 $\Delta\tau\to 0$ 时，如果极限存在，即得矢量 $\mathbf{a}(\tau)$ 的微商

$$\frac{d\mathbf{a}(\tau)}{d\tau}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\mathbf{a}(\tau+\Delta\tau)-\mathbf{a}(\tau)}{\Delta\tau}.$$

显然，这微商是一个矢量，它的方向是沿曲綫 (C) 在点 M 的切綫方向．

再求微商得二級微商 $\frac{d^2}{d\tau^2}\mathbf{a}(\tau)$，余类推．

如果

$$\mathbf{a}(\tau)=[a_1(\tau), a_2(\tau), a_3(\tau)],$$

可得

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{a}(\tau)=[a_1'(\tau), a_2'(\tau), a_3'(\tau)]$$

及

$$\frac{d^m}{d\tau^m}\mathbf{a}(\tau)=[a_1^{(m)}(\tau), a_2^{(m)}(\tau), a_3^{(m)}(\tau)],$$

即矢量的微商是支量微商所成的矢量．

立即得出一个函数乘一个矢量的微商公式

$$\frac{d}{d\tau}[f(\tau)\mathbf{a}(\tau)]=\frac{df(\tau)}{d\tau}\mathbf{a}(\tau)+f(\tau)\frac{d\mathbf{a}(\tau)}{d\tau}.$$

又由于

$$\mathbf{a}(\tau)\cdot\mathbf{b}(\tau)=a_1(\tau)b_1(\tau)+a_2(\tau)b_2(\tau)+a_3(\tau)b_3(\tau),$$

可得

$$\frac{d}{d\tau}[\mathbf{a}(\tau)\cdot\mathbf{b}(\tau)]=a_1'(\tau)b_1(\tau)+a_2'(\tau)b_2(\tau)+a_3'(\tau)b_3(\tau)$$

$$+a_1(\tau)b_1'(\tau)+a_2(\tau)b_2'(\tau)+a_3(\tau)b_3'(\tau)$$

$$=\frac{d\mathbf{a}(\tau)}{d\tau}\cdot\mathbf{b}(\tau)+\mathbf{a}(\tau)\cdot\frac{d\mathbf{b}(\tau)}{d\tau}.$$

这是內积微商公式.

由此立即得出：設 $\mathbf{a}(\tau)$ 为单位矢量，即 $\mathbf{a}(\tau)\cdot\mathbf{a}(\tau)=1$，則

$$\mathbf{a}(\tau)\cdot\frac{d\mathbf{a}(\tau)}{d\tau}=0.$$

所以单位矢量和它的微商垂直.

又由

$$\mathbf{a}(\tau)\times\mathbf{b}(\tau)=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1),$$

可知

$$\frac{d}{d\tau}[\mathbf{a}(\tau)\times\mathbf{b}(\tau)]=(a_2'b_3-a_3'b_2,\ a_3'b_1-a_1'b_3,\ a_1'b_2-a_2'b_1)$$

$$+(a_2b_3'-a_3b_2',a_3b_1'-a_1b_3',a_1b_2'-a_2b_1')$$

$$=\frac{d\mathbf{a}(\tau)}{d\tau}\times\mathbf{b}(\tau)+\mathbf{a}(\tau)\times\frac{d\mathbf{b}(\tau)}{d\tau}.$$

这是矢量积的微商公式.

如果把参数 τ 看为时間 t，則以原点为起点的矢量

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]$$

的另一端所成的軌迹：$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ 可以看作一个质点的运动曲綫，它对 t 的微商

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

就是这点的运动的速度矢量，而

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

就是这一质点加速度矢量.

在曲綫 (C) 上取一点作为出发点，用从这点沿曲綫 (C) 长度 s 来表出这曲綫上的点，即以 s 为参变数. 前已証明，由 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 所对应的点 M_1, M_2 之間的弧长等于

$$\int_{(M_1)}^{(M_2)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt.$$

弧的微分表达式

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}}.$$

如果弧长 s 为参变数，则微商 $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ 各等于曲綫切綫的方向余弦，就是等于这切綫的正方向与坐标軸交角的余弦. 更确切些，速度矢 $\mathbf{v}$ 的长度是

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

而速度的方向余弦是

$$\cos(\hat{vx}) = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{v},$$

$$\cos(\hat{vy}) = \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dt}}{v},$$

$$\cos(\hat{vz}) = \frac{dz}{ds} = \frac{\frac{dz}{dt}}{v}.$$

我們把这切綫方向余弦定义为曲綫在点 (x, y, z) 的方向余弦，它們与 dx, dy, dz 成比例，因此切綫方程可以写成为

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}$$

或

$$\frac{X-\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{Y-\psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{Z-\chi(t)}{\chi'(t)},$$

这儿 (X, Y, Z) 是切綫上点的坐标.

§2. 平面上的运动

命 $\mathbf{r}$ 表示平面上一点 M 的位置的矢量，我們可以把 $\mathbf{r}$ 表成为

$$r\mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = (\cos\theta, \sin\theta).$$

这就是极坐标表示法，$\mathbf{R}$ 是一单位矢量，我們可以立刻看到

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta) \quad (\text{定义为 } \mathbf{P}),$$

这是和 $\mathbf{R}$ 垂直的矢量.

微分 $\mathbf{r} = r\mathbf{R}$，則得

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{R} + r\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{R} + r\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{R} + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{P}.$$

这公式把一点的速度分解成为两部分，前者 $\mathbf{v}_r = \frac{dr}{dt}\mathbf{R}$ 表示速度沿向径的分量，而后者

$$\mathbf{v}_p = r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{P}$$

表示沿垂直于向径的方向的分量. $\frac{d\theta}{dt}$ 称为角速度，在圓周上运动时，即 $\frac{dr}{dt} = 0$，可知

$$\mathbf{v} = r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{P},$$

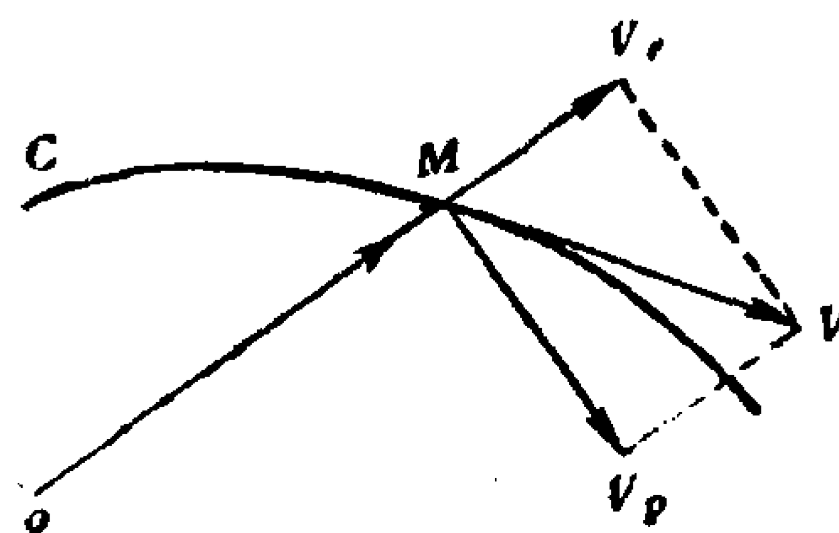


图 34

即

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}.$$

加速度矢量等于

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{R} + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{P} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{P} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{P}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{R} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{P},$$

这儿用了

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\theta} = (-\cos\theta, -\sin\theta) = -\mathbf{R}.$$

如果我們的运动是由于一个向心力所引起的，即 $\mathbf{F} = f\mathbf{R}$. 由公式 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$（力等于質量乘加速度），則与以上的公式相比較就可以看出

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

也就是

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = 常数 = h.$$

而 $\frac{1}{2}r^2d\theta$ 就等于向径所扫过的面积元素 dA. 所以

$$\frac{dA}{dt} = h,$$

即如果經过的时間相等，則向径所扫过的面积也相等。

这就是著名的 Kepler 行星运行第一規律.

§3. 平面曲綫的曲率

把 s 作为参变数，則

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) = \mathbf{t}$$

就成为一个单位切矢量. 这个单位切矢量的微商

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}\right)$$

垂直于单位切矢量，它称为**曲率矢量**. 曲率矢量的长度

$$|\mathbf{n}| = \frac{1}{\rho}$$

的倒数 ρ 称为**曲率半径**.

命

$$\mathbf{t} = (\cos\alpha, \sin\alpha),$$

其中 α 就是切矢量 $\mathbf{t}$ 与 x 軸所成的角度. 因此

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)\frac{d\alpha}{ds}.$$

角度 α 对弧长 s 的微商 $k=\dfrac{d\alpha}{ds}$ 称为平面曲綫 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 的曲率。令

$$\frac{1}{\rho}=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|,$$

故曲率絕对值的倒数就是曲率半徑[1]。

易知

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}$$

及

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}&=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{ds/dt}\right)\frac{dt}{ds}\\&=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\\&=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^4\\&=\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^4.\end{aligned}$$

由 $\mathbf{r}=(\varphi(t),\psi(t))$ 及

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\varphi'^2+\psi'^2,$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\frac{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}{(\varphi'^2+\psi'^2)^2}(-\psi',\varphi'),$$

因而得出

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{3/2}},$$

$$\frac{1}{\rho}=|k|=\frac{|\varphi'\psi''-\varphi''\psi'|}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{3/2}}.$$

如果用显函数表示法，即 $x=x,\ y=f(x)$，此处 x 是参变数，则得

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho}=|k|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

又如果用极坐标表示法，即 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r=r(\theta)$，$\theta$ 是参数，得

$$\varphi'=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\quad \varphi''=\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta.$$

---

1) 一般微分几何教科书中，定义曲率矢量 n 的长度为曲率，因此曲率恆大于零或等于零。 我們这样的定义，即可正可負，当确定了弧长的計算起点和曲綫的方向后，这个正負符号就反映了曲綫上凹或下凹的几何特性。

$$\psi' = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta, \quad \psi'' = \frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta.$$

即得

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}},$$

$$\frac{1}{\rho} = |k| = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

关于曲率 k 的正負号可以作如下的說明:在 $y'' > 0$ 时，曲率 $k > 0$, 这时曲綫向上凹；在 $y'' < 0$ 时，曲率 $k < 0$, 这时曲綫向上凸.

例. 圓 $x^2 + y^2 = R^2$ 的参数表示式是 $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, 所以

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}.$$

所以曲率半径就是圓的半径 R, 曲率也是常数 $\frac{1}{R}$.

§4. 曲綫的本性方程

用坐标系統来表示曲綫的性質，倒底具有人为的性質，这个人用这个坐标系，那个人用那个坐标系，得出来的表示法可以是很不同的. 其原因在于坐标系統并不是曲綫的基本性質，而我們仅仅借用坐标系統来表达曲綫的性質而已.

曲綫的基本因素应当是弧长 s (不管坐标系統如何，只要在其上取一起点，定一确定的方向，取一单位长度，則曲綫的弧长便完全确定)及曲率 $k = \frac{d\alpha}{ds}$.

对每一条曲綫，都可以在这两个因素之間建立起依从关系

$$k = g(s), \tag{1}$$

这个方程称为曲綫的本性方程.

定理. 具有同一本性方程的諸曲綫，只能在平面上的位置有所不同，換言之，如果有两条曲綫都适合 (1) 式，則可經过平移

$$(x, y) \to (x + h, y + k)$$

与旋轉

$$(x, y) \to (x\cos\theta + y\sin\theta, \ -x\sin\theta + y\cos\theta).$$

把一条搬到另一条.

証. 先經过平移，把两条曲綫計算弧长的起点重合起来，再繞这点旋轉一下、使它們在这点的切綫重合起来. 这两条曲綫的动点坐标各为 (x_1, y_1), (x_2, y_2); 切綫与 x 軸的交角各为 α_1, α_2; 曲率各为 k_1, k_2.

由 (1) 可知，对所有的 s 都有

$$k_1 = k_2,$$

也就是

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{d\alpha_2}{ds}.$$

因此 $\alpha_1 = \alpha_2 + c$，c 是一常数．但当 $s = 0$ 时，已知 $\alpha_1 = \alpha_2$，所以 $c = 0$。

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{dx_2}{ds},$$

$$\frac{dy_1}{ds} = \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \frac{dy_2}{ds}.$$

所以 x_1，x_2 相差一个常数，y_1，y_2 相差一个常数．但当 $s = 0$ 时，$x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，因此

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

所以二曲綫重合起来了．

这个証法也說明了根据本性方程还原为坐标表示法的方法：先从

$$\frac{d\alpha}{ds} = g(s) \quad [\text{对任意的連續函数 } g(s)]$$

得

$$\alpha = \alpha(s) = \int_0^s g(u)du + \alpha_0,$$

此处 α_0 是常数，再从等式

$$dx = \cos\alpha\, ds, \quad dy = \sin\alpha\, ds$$

得出

$$x = \int_0^s \cos\alpha\, ds + x_0, \quad y = \int_0^s \sin\alpha\, ds = y_0,$$

此处 x_0，y_0 也是常数．

不难看出，曲綫的平行移动会影响 x_0，y_0，而旋轉会影响 α。

注意 1．曲綫长度的起算点的选择，方向的选择，可能引起本性方程的变化。

2．两条处于軸对称位置的曲綫，它們的本性方程仅在右端差一符号，即

$$k = g(s)$$

与

$$k = -g(s).$$

实际上，对称地选择两条曲綫弧长的起算点与方向时，它們的曲率符号相反，如图 35．反之，分别具有上两式的曲綫，可借平行移动使它們处于对称的位置．

例 1．求对应于本性方程 $R^2 = 2as$ 的曲綫．

因为我們只要求出一条曲綫即可，所以在选择积分常数的时候，可以依照对我們最便利的方法选择．

由

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2as}}$$

得

$$s = \frac{a}{2}\alpha^2, \quad ds = a\alpha\, d\alpha.$$

因此

$$dx = \cos\alpha\, ds = a\alpha\cos\alpha\, d\alpha,$$
$$dy = \sin\alpha\, ds = a\alpha\sin\alpha\, d\alpha,$$

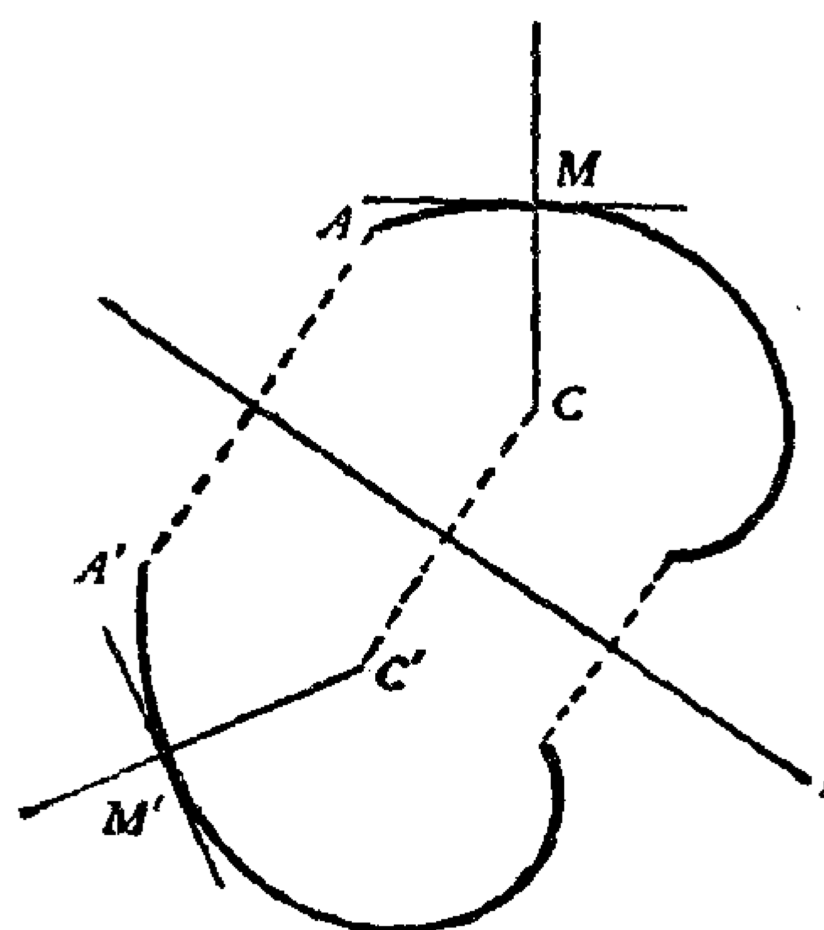


图 35

故

$$x = a(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha), \quad y = a(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

例 2. 求对应于本性方程 $R = ms$ 的曲綫.

由

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{ms}$$

得

$$s = e^{m\alpha},$$
$$ds = me^{m\alpha}d\alpha,$$
$$dx = \cos\alpha \cdot me^{m\alpha}d\alpha,$$
$$dy = \sin\alpha \cdot me^{m\alpha}d\alpha.$$

因此

$$x = \frac{m}{1+m^2}(m\cos\alpha + \sin\alpha)e^{m\alpha},$$

$$y = \frac{m}{1+m^2}(m\sin\alpha - \cos\alpha)e^{m\alpha}.$$

現在将直角坐标化为极坐标:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}e^{m\alpha}.$$

命 $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{m}$,則

$$\frac{y}{x} = \frac{m\sin\alpha - \cos\alpha}{m\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega).$$

故 $\theta = \alpha - \omega$,所以得到曲綫的极坐标表达式

$$r = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}e^{m\theta}e^{m\omega}.$$

这就是对数螺綫.

例 3. 試求悬鏈綫 $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 的本性方程.

由

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}$$

得

$$R = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

另一方面,

$$s = a\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2},$$

故得本性方程

$$R = a + \frac{s^2}{a}.$$

例 4. 試求星形綫 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ 的本性方程.

取第一象限的那支的中点 $\left(对应 t = \frac{\pi}{4}\right)$ 为弧长的起算点，則

$$s = \frac{3a}{2}\sin^2 t - \frac{3a}{4}.$$

故

$$R = \frac{ds}{dt} = 3a\sin t\cos t.$$

因此本性方程为

$$R^2 = 4\cdot\frac{3a}{2}\sin^2 t\,\frac{3a}{2}\cos^2 t = 4\left(\frac{3a}{4}+s\right)\left(\frac{3a}{4}-s\right) = \frac{9a^2}{4} - 4s^2.$$

§5. 曲率圓与漸屈綫

在曲綫上取参数为 t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$ 的三个点，对这三点作一圓. 当 $\Delta t\to 0$ 时，这圓的极限位置称为曲率圓，也称密切圓.

命圓的方程是

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

即得

$$[\varphi(t)-a]^2 + [\psi(t)-b]^2 = R^2, \tag{1}$$

$$[\varphi(t+\Delta t)-a]^2 + [\psi(t+\Delta t)-b]^2 = R^2, \tag{2}$$

$$[\varphi(t+2\Delta t)-a]^2 + [\psi(t+2\Delta t)-b]^2 = R^2. \tag{3}$$

由 (2) 減 (1) 再除以 Δt，并令 $\Delta t\to 0$，可知

$$[\varphi(t)-a]\varphi'(t) + [\psi(t)-b]\psi'(t) = 0. \tag{4}$$

由 (1) 加 (3) 減去两倍的 (2)，再除以 Δt^2，并命 $\Delta t\to 0$，可知

$$[\varphi(t)-a]\varphi''(t) + [\psi(t)-b]\psi''(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) = 0. \tag{5}$$

解出 (4) 与 (5)，可知

$$\varphi(t) - a = \frac{\psi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''},$$

$$\psi(t) - b = \frac{-\varphi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}.$$

所以我們的圓的圓心是

$$\left.\begin{aligned} a &= \varphi - \frac{\psi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''},\\ b &= \psi + \frac{\varphi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

而圓的半径平方等于

$$R^2=\left(\frac{\psi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}\right)^2+\left(\frac{\varphi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}\right)^2=\frac{(\varphi'^2+\psi'^2)^3}{(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')^2}.$$

这就是曲綫在 t 这一点曲率半径的平方. 我們取

$$R=\frac{(\varphi'^2+\psi'^2)^{3/2}}{|\varphi'\psi''-\psi'\varphi''|}=\left|\frac{ds}{d\alpha}\right|.$$

在曲綫由函数 $y=f(x)$ 表示的情况下,

$$a=x-\frac{1+y'^2}{y''}y',\quad b=y+\frac{1+y'^2}{y''},\quad R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

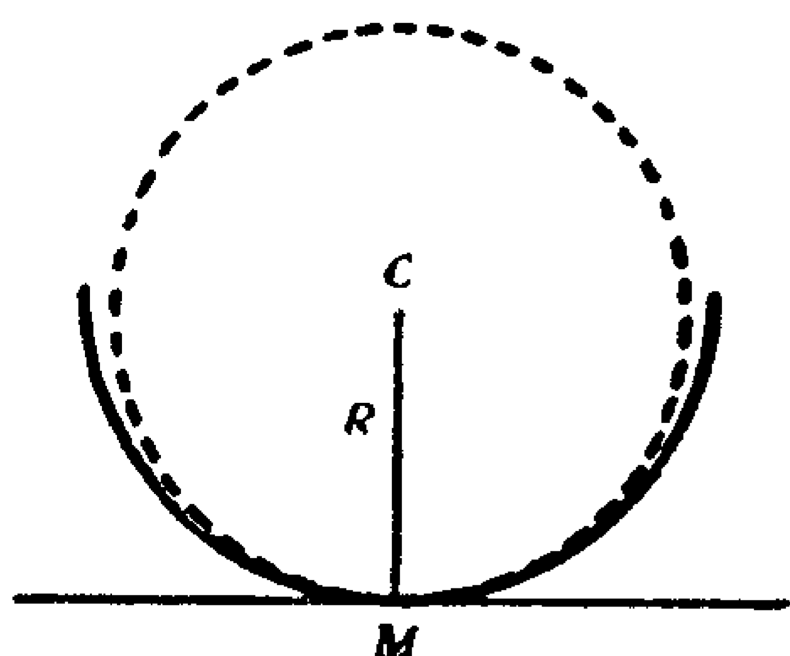


图 36

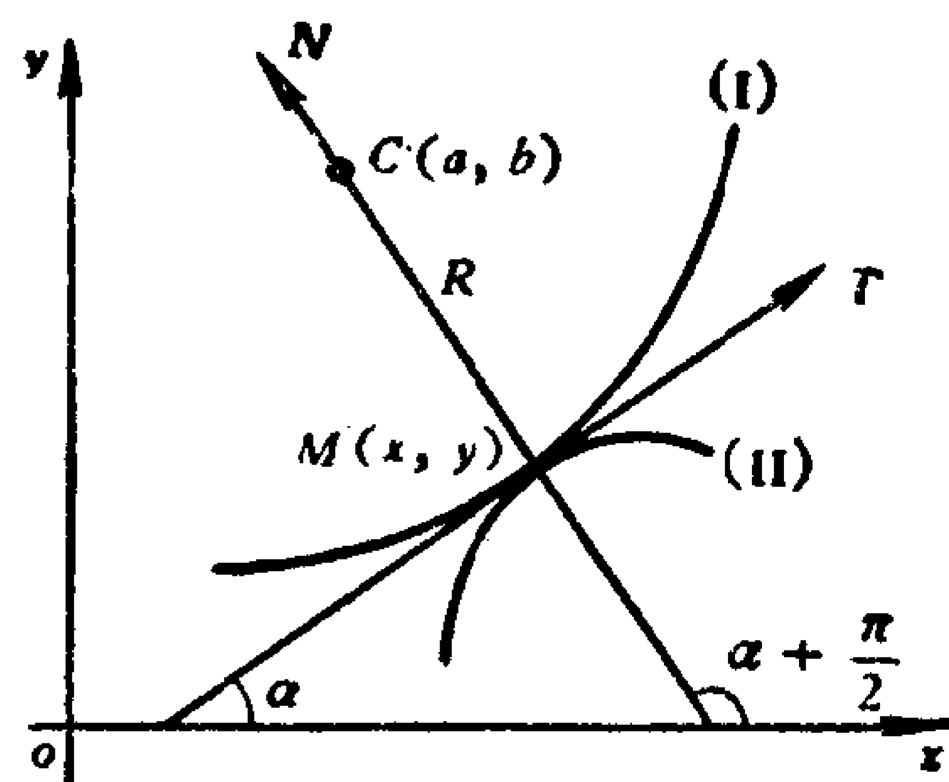


图 37

由图 37 知

$$x-a=-R\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y-b=-R\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),$$

故圓心也可以表为

$$a=x-R\sin\alpha,$$

$$b=y+R\cos\alpha.$$

曲率圓显然有以下的一些性质(参考图 36,37):

1) 与曲綫在 t 点相切;

2) 它的凹向与曲綫在这一点的凹向相同;

3) 它的半径与曲綫在这一点的曲率半径相同.

定义. (a, b) 称为曲率中心, 曲率中心的軌迹称为原曲綫的漸屈綫, 而原曲綫称为这漸屈綫的漸伸綫.

例 1. 求抛物綫 $y^2=2px$ 的漸屈綫.

由 $yy'_x=p$ 得 $yy''_{x^2}+y'^2_x=0$, 即 $y^3y''_{x^2}=-p^2$.

因此曲率中心的坐标 (ξ, η) 为

$$\xi=x-yy'_x\frac{y^2+(yy'_x)^2}{y^3y''_{x^2}}=x+\frac{y^2+p^2}{p}=3x+p=\frac{3y^2}{2p}+p,$$

$$\eta=y+y\frac{y^2+(yy'_x)^2}{y^3y''_{x^2}}=y-\frac{y}{p^2}(y^2+p^2)=-\frac{y^3}{p^2}.$$

从以上两个方程中消去 y，得漸屈綫方程

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3.$$

例 2. 求椭圓 $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ 的漸屈綫.

由于

$$x'_t = -a\sin t,\quad x''_{t^2} = -a\cos t,$$
$$y'_t = b\cos t,\quad y''_{t^2} = -b\sin t,$$

代入 (6) 就得曲率中心 (ξ, η) 的坐标为

$$\xi = a\cos t - \frac{b\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$
$$\eta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t.$$

由此消去 t，就得到椭圓的漸屈綫

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

例 3. 求对数螺綫 $r = ae^{m\theta}$ 的漸屈綫.

因为

$$\frac{dr}{d\theta} = mae^{m\theta} = mr,$$

故

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{m},$$

$$R = \frac{(r^2 + m^2r^2)^{3/2}}{r^2 + 2m^2r^2 - m^2r^2} = r\sqrt{1 + m^2} = \frac{r}{\sin\omega}.$$

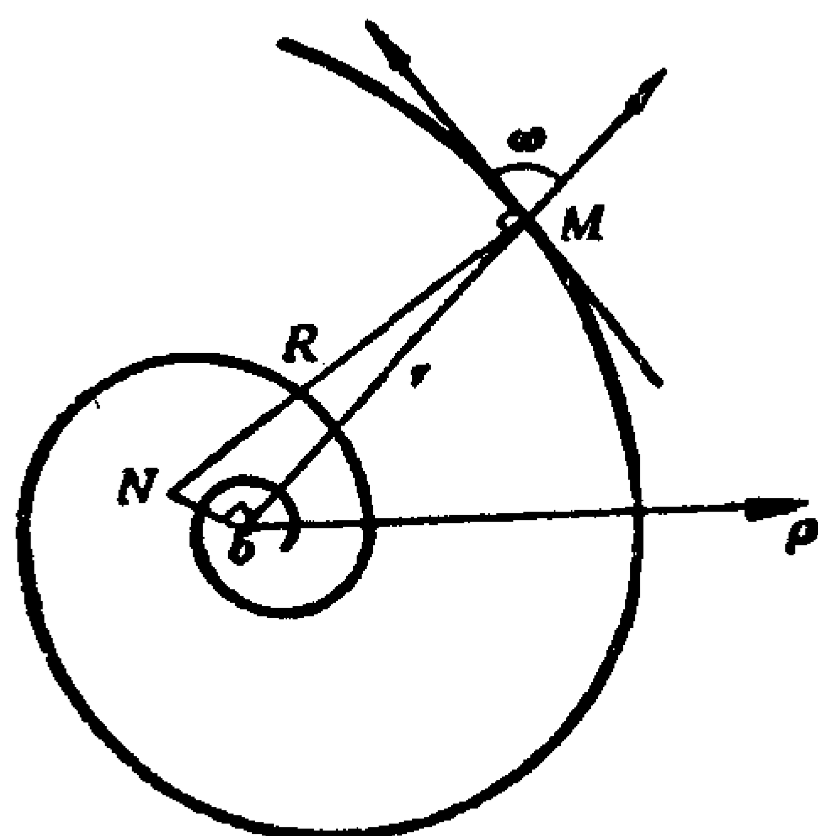


图 38

命 $N(r_1, \theta_1)$ 为曲率中心，则 $ON \perp OM$，故

$$r_1 = r\operatorname{ctg}\omega = mr,\quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta.$$

故得漸屈綫

$$r_1 = mae^{m\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)} = a_1e^{m\theta_1}\ (\text{这里 } a_1 = mae^{-\frac{m\pi}{2}}).$$

§6. 一般的一阶微分方程

一般的一阶微分方程的形式是

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

如果易于解出 y'，虽然不止一个解：

$$y' = \varphi_1(x, y),\quad y' = \varphi_2(x, y),\ \cdots,\quad y' = \varphi_r(x, y), \tag{2}$$

则我們可以逐步解出 (2) 来，这些解当然都是原方程的解.

例. 求方程

$$xy'^3 - (x^2 + 2y)y'^2 + 2x(y + 2)y' - 4x^2 = 0$$

的解.

分解因子得

$$y' - x = 0, \quad y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}.$$

第一式的解是 $y = \frac{1}{2}x^2 + c$, 第二式是 0 次齐次的,因此换变数 $y = ux$, 得出

$$\frac{du}{\pm\sqrt{u^2 - 4}} = \frac{dx}{x}.$$

积分之,得

$$u \pm \sqrt{u^2 - 4} = \frac{x}{k},$$

这儿 k 是常数. 有理化得

$$\left(u - \frac{x}{k}\right)^2 - (u^2 - 4) = 0,$$

即得

$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{2y}{k} + 4 = 0$$

或

$$x^2 = 2k(y - 2k).$$

因此原方程的解是两組拋物綫

$$y = \frac{1}{2}x^2 + c$$

与

$$x^2 = c'(y - c').$$

如果 (1) 式并不容易(或在初等函数范围內不可能)解出 y' 来, 我們可以用以下的几何方法:

命 $\frac{dy}{dx} = p$,把解方程 (1) 的問題看成为在曲面

$$F(x, y, p) = 0 \tag{3}$$

上求适合于条件

$$dy = p\,dx \tag{4}$$

的曲綫的問題.

如果 (3) 有参变数表示法

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad p = \omega(u, v), \tag{5}$$

則由 (4) 可知

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \omega(u, v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right]. \tag{6}$$

因此,解微分方程 (1) 的問題一变而为解

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\omega\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}}{\omega\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}} \tag{7}$$

的問題了. 如果能解出 (7),

$$v = g(u, c),$$

则

$$x = \varphi(u, g(u, c)), \quad y = \psi(u, g(u, c)).$$

这就是方程 (1) 的解.

但一般讲来,求参数表达式 (5) 与解方程 (7) 都并不容易,甚至不可能用初等函数表出来.

例 1. 求

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0 \tag{8}$$

的解.

把 (8) 看成为 (x, y, p) 所定义的曲面,把 y, p 看成为参数,则得

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}. \tag{9}$$

由 $dx = \frac{1}{p}dy$ 得

$$\frac{1}{p}dy = \left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\right)dp - \left(\frac{p^2}{4y^2} - \frac{2}{p}\right)dy,$$

卽得

$$dp\,\frac{p^3 - 4y^2}{2yp^2} = \frac{p^3 - 4y^2}{4y^2p}dy.$$

除去因子

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2yp}, \tag{10}$$

得出

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y}.$$

解得 $p = cy^{\frac{1}{2}}$. 因而代入 (9),

$$x = \frac{c^2}{4} + \frac{2}{c}y^{\frac{1}{2}},$$

就是方程 (8) 的解. 引进新常数 $c_1 = \frac{1}{4}c^2$,得出更整齐的形式:

$$y = c_1(x - c_1)^2. \tag{11}$$

注意我們消去了因子 (10), 这个因子的分子

$$p^3 - 4y^2 = 0$$

給出另一解来. 代进 (8) 式,可以获得

$$27y = 4x^3,$$

它也是 (8) 式的解. 又由 (10) 的分母, $y = 0$ 也是一个解.

带一个参变数的一阶微分方程的解称为通解,以上的討論說明了,通解之外还有两个特解:

$$y = 0, \quad y = \frac{4}{27}x^3.$$

这是怎样得来的?

例 2. Clairaut 方程

$$y = xy' + f(y'). \tag{12}$$

考虑曲面

$$y = xp + f(p). \tag{13}$$

取 x 与 p 为参数,利用 $dy = p\,dx$, 求 (13) 的微分,可得

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx},$$

即得

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

由 $\frac{dp}{dx} = 0$ 得 $p = c$, 代入 (13) 得 (12) 的解答

$$y = cx + f(c).$$

但由另一因子 $x + f'(p) = 0$ 得

$$x = -f'(p), \quad y = -pf'(p) + f(p).$$

把 p 看为参变数,这也是 (12) 的解.

总之,这儿有这样的現象:給了一个微分方程 (1),我們在它的通解

$$\Phi(x, y, c) = 0 \tag{14}$$

之外(即带有一个参变数的解之外),还可能有解. 其他解的出現是由于曲綫族的一种几何性质:存在一条曲綫 L,其上任一点都和 (14) 中的某一綫相切. 这样的曲綫的切綫显然与 Φ 的某一切綫相同,即 y' 相同. 因此也适合于 (1) 式. 这种性质的曲綫称为曲綫族 (14) 的包絡綫.

§7. 包 絡 綫

命

$$\Phi(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

是一个曲綫族,在 (x, y) 平面上某区域内每一点至少有曲綫族的一条曲綫通过.

現在想找到曲綫 L,使 L 的每一点都与 (1) 族的某一曲綫相切,而且曲綫 L 的每一段都与族 (1) 的无穷多条曲綫相切(不同的 c 对应于不同的曲綫),这样的 L 称为族 (1) 的包絡或包絡綫.

如果包絡存在,则包絡上每一点 (x, y) 必与族 (1) 中之一条曲綫

$$\Phi(x, y, c_0) = 0$$

相切,这 c_0 是由点 (x, y) 所决定的,命之为 $c_0 = c(x, y)$, 即包絡上的点一定适合于

$$\Phi(x, y, c(x, y)) = 0.$$

在包絡上, y 又是 x 的函数. 不妨把 $c(x, y)$ 看成为 x 的函数 $c(x)$,也就是

$$\Phi(x, y, c(x)) = 0. \tag{2}$$

对 x 微分 (2) 式得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial \Phi}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0,$$

这式所得出的 $\frac{dy}{dx}$ 是包絡綫上的切綫方向。

从另一方面看，曲綫族 (1) 中經过 (x, y) 的曲綫 L_c 一定适合于

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.$$

此处所得出的 $\frac{dy}{dx}$ 是曲綫 L_c 的切綫方向. 由假定可知，两个切綫方向是一致的，所以

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0.$$

这就是在一点包絡 (2) 与通过該点的 L_c 有公共切綫的必要条件.

如果 $\frac{dc}{dx}=0$，卽 c 为常数，所得出的曲綫 (2) 就是 (1) 中的曲綫. 如果 $\frac{dc}{dx}\neq 0$，則在包絡綫上常有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c}=0. \tag{3}$$

曲綫族 $\Phi(x, y, c)=0$ 上的点，如果适合

$$\frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial y}=0,$$

則称为奇点. 曲綫族 $\Phi(x, y, c)=0$ 过奇点的曲綫，在奇点沒有确定的切綫。

上面証明了:包絡綫 $y=y(x)$ 适合 (2) 和 (3)，其中 $c=c(x)$ 不是常数. 反之，幷不是 (2) 和 (3) 的解 $y=y(x)$ 都是包絡.

容易証明，适合方程 (2) 和 (3) 的曲綫 $y=y(x)$，如果不包含曲綫族 $\Phi(x, y, c)=0$ 的奇点，則必为包絡綫。

例 1. 求

$$y=c(x-c)^2$$

的包絡.

对 c 求微商，得

$$(x-c)^2-2c(x-c)=0,$$

卽得 $c=x$, $c=\frac{1}{3}x$. 代入原式得

$$y=0, \quad y=\frac{4}{27}x^2.$$

这就是上节的特解。

例 2. 求

$$y=cx+f(c)$$

的包絡。

对 c 微商,得

$$x + f'(c) = 0,$$

即得上节例 2 的特解.

例 3. 仰角为 α 的弹道曲綫是

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

这儿 g 是引力常数, v_0 是初速. 对 α 来說,这成一族曲綫,求这族的包絡.

对 α 微分得

$$x \sec^2 \alpha - \frac{g \sin \alpha}{v_0^2 \cos^3 \alpha} x^2 = 0,$$

得 $x = 0$ 及

$$4gv_0^2y = 2v_0^4 - 2g^2x^2.$$

这就是包絡綫.

这包絡綫就是所謂的安全抛物綫, 也就是炮弹打不到这抛物綫以外去.

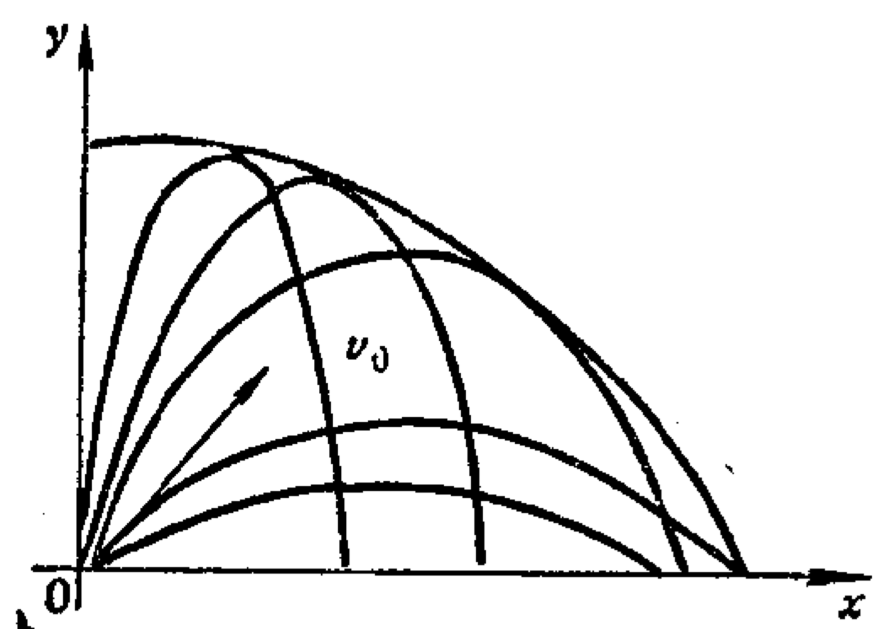


图 39

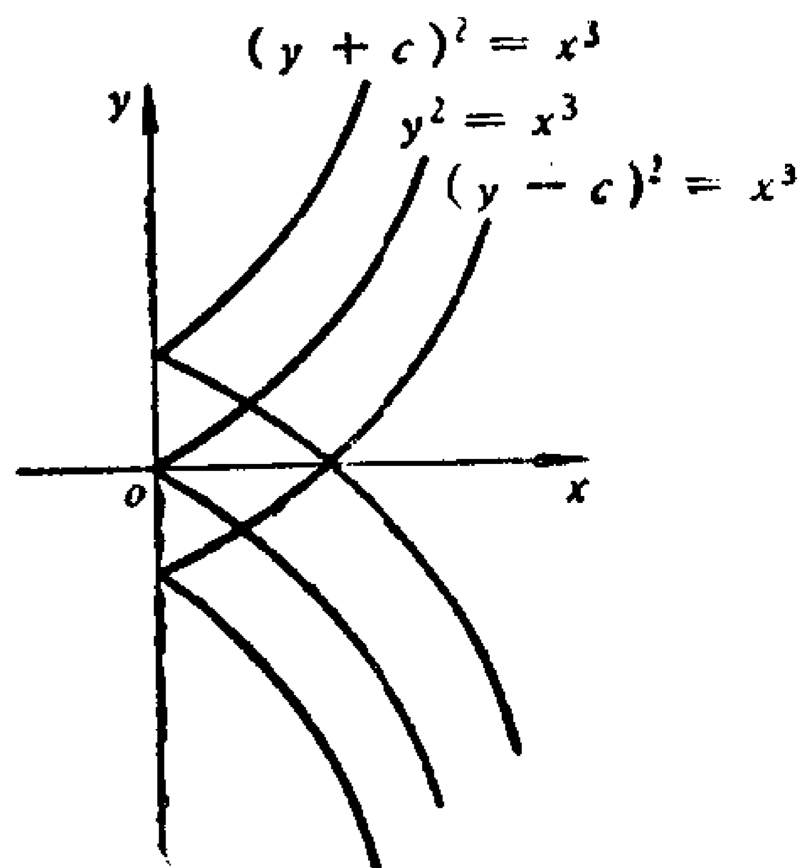


图 40

例 4. 半立方抛物綫族

$$(y + c)^2 = x^3.$$

对 c 微分得

$$2(y + c) = 0.$$

消去 c 得 $x = 0$. y 軸不是包絡綫,而是奇点 $y = -c$, $x = 0$ 的軌迹.

§8. 追 踪 問 題

我們現在考虑一个导弹 M 追踪一个目标的問題. 为了簡单起見,我們假定这样的一个追踪是在一平面內进行的. 这平面假定就是 x, y 平面. 目的物可能經常改变它的速度和方向, 而我們的导弹也經常改变速度和方向. 假定目的物經常以角度 φ 来避开导弹的方向,而导弹經常以角度 θ 来迎击目标.

命 $\mathbf{r}_T$ 与 $\mathbf{v}_T$ 表示目标的位置矢量与速度矢量, 命 $\mathbf{r}_M$ 与 $\mathbf{v}_M$ 表示导弹的位置矢量与速度矢量,命 ψ 表示图中所示的角度.

显然有

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_T-\mathbf{r}_M.$$

这代表导弹与目的物的相对位置矢量. 由

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}_T-\mathbf{v}_M$$

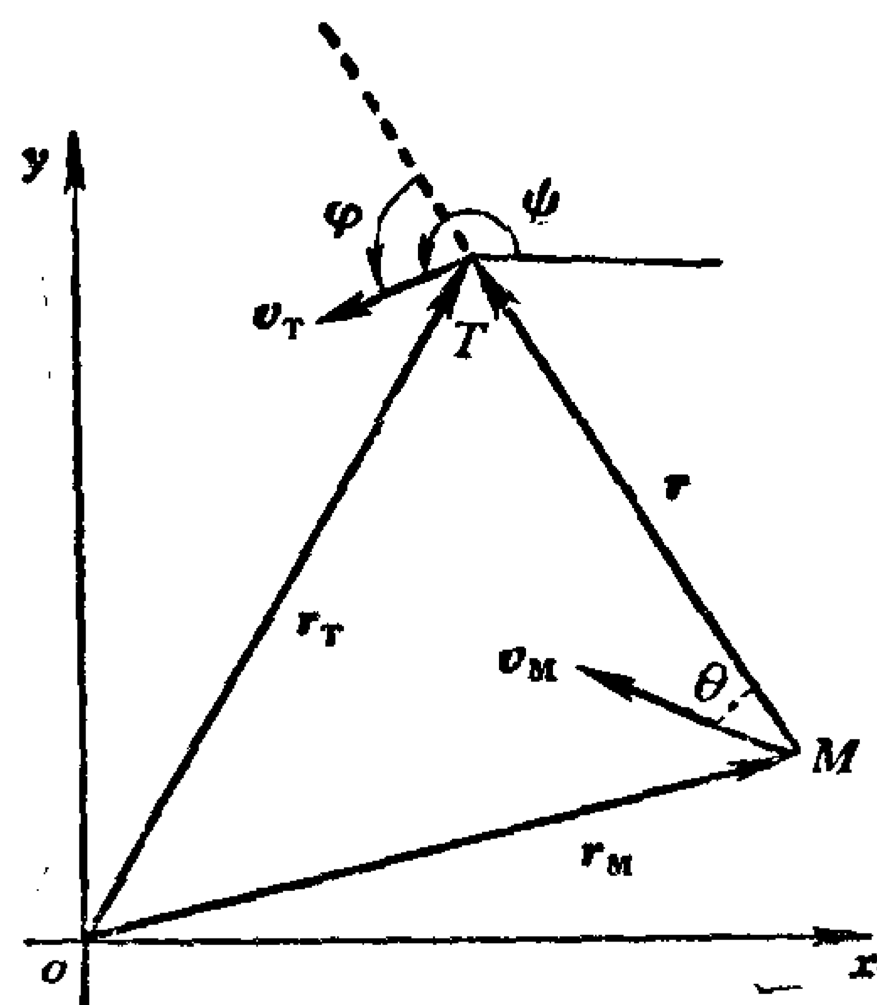


图 41

得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_T-\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_M.$$

这就是

$$r\frac{dr}{dt}=rv_T\cos\varphi-rv_M\cos\theta,$$

即

$$\frac{dr}{dt}=v_T\cos\varphi-v_M\cos\theta \tag{1}$$

(这儿用了 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{ab})$).

微分 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_T=rv_T\cos\varphi$, 即得

$$\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{v}_T}{dt}+(\mathbf{v}_T-\mathbf{v}_M)\cdot\mathbf{v}_T=v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi)+r\cos\varphi\frac{dv_T}{dt}. \tag{2}$$

命 $\mathbf{t}$ 表目标曲綫的单位切矢量,即 $\mathbf{v}_T=v_T\mathbf{t}$, 及

$$\frac{d\mathbf{v}_T}{dt}=\frac{dv_T}{dt}\mathbf{t}+v_T\frac{d\mathbf{t}}{dt},$$

所以

$$\frac{d\mathbf{v}_T}{dt}=\frac{dv_T}{dt}\mathbf{t}+v_T\frac{d\psi}{dt}\mathbf{n}$$

$\left(\text{因 }\frac{d\mathbf{t}}{dt}=\frac{d\psi}{dt}\mathbf{n}\right)$. 方程 (2) 变成

$$-rv_T\frac{d\psi}{dt}\cdot\sin\varphi+v_T^2-v_Mv_T\cos(\theta-\varphi)=v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi). \tag{3}$$

这就是追踪者与被追踪者之間的速度与方向的关系式.

例 1. 狗逐兎問題. 当 $t=0$ 时兎在原点,沿着 y 軸以常速率 v_T 向正方向跑去. 狗在 x 軸上 $(a,0)$ 处开始逐兎的速度也是常数速 v_M. 追逐的情况是狗总是面对着兔子追去,即 $\theta=0$: 現在我們由 (1) 及 (3) 得

$$\frac{dr}{dt}=v_T\cos\varphi-v_M,$$

又由于兎沿 y 軸跑,所以 $\psi=\frac{\pi}{2}$, 即由(3)得

$$v_T^2-v_Mv_T\cos\varphi=v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi).$$

因此

$$v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi)+v_M\frac{dr}{dt}=v_T^2-v_M^2.$$

积分之，得

$$v_T r\cos\varphi + v_M r = (v_T^2 - v_M^2)t + c.$$

当 $t=0$ 时，$r=a$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $c=v_M a$，即

$$(v_T\cos\varphi + v_M)r = (v_T^2 - v_M^2)t + v_M a.$$

在狗追上兔子的时候，$r=0$，所以知道所需要的时間等于

$$t = \frac{a v_M}{v_M^2 - v_T^2}.$$

例 2. 設目的物在半径为 a 的圆周上以等速 V 运动，导弹从圆心出发追踪。当 $t=0$ 时，目的物在 $(r, 0)$，导弹在圆心. 若导弹的速度也是 V，且圆心、导弹、目的物常在一条直綫上，求証当目的物行至 $(0, r)$ 时，导弹正好追上它.

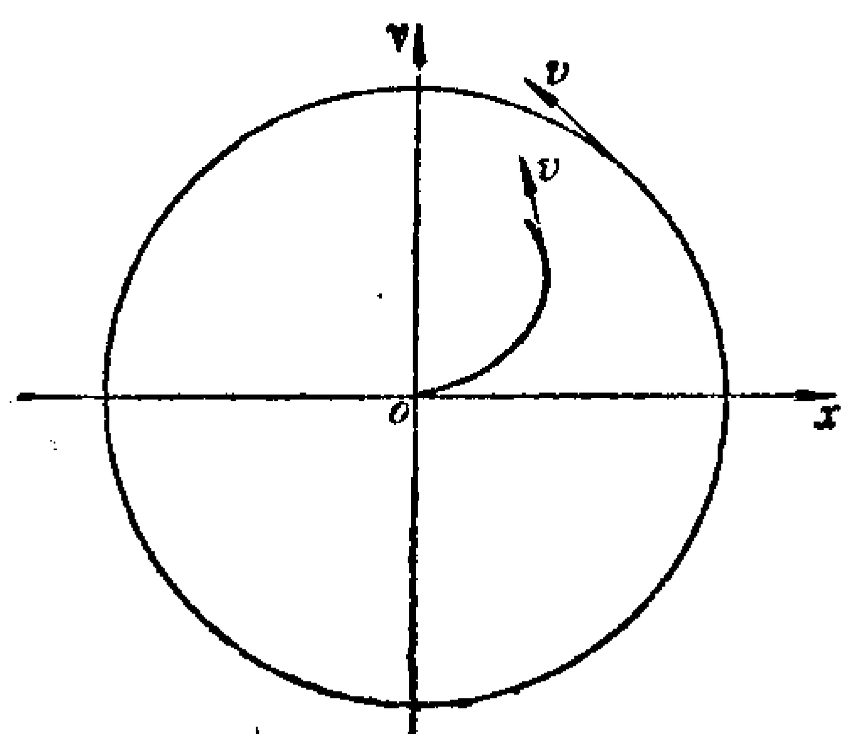


图 42

設时間 t 时，目的物在 $[r(t), \theta(t)]$，导弹在 $[r_1(t), \theta_1(t)]$，則

$$V^2 = a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{a}, \quad \theta = \frac{V}{a}t + c.$$

因 $t=0$ 时 $\theta=0$，所以 $c=0$，

$$\theta_1 = \theta = \frac{V}{a}t. \tag{4}$$

又由

$$\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = V^2 - \left(\frac{r_1 d\theta_1}{dt}\right)^2 = V^2\left[1 - \left(\frac{r_1}{a}\right)^2\right],$$

$$\frac{dr_1}{\sqrt{1-\left(\frac{r_1}{a}\right)^2}} = V\,dt,$$

得

$$a\sin^{-1}\frac{r_1}{a} = Vt + c_1.$$

由 $t=0$ 时 $r_1=0$，得 $c_1=0$，因此

$$a\sin^{-1}\frac{r_1}{a} = Vt.$$

当导弹追到目的物时，$r=r_1=a$，故

$$Vt = a\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

由 (4), (5) 可知

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

即当目的物行至$(0, a)$时被导弹追上.

§9. 空間曲綫的基本元素

空間曲綫(C)也是可以用原点0到变点p的变矢量$\mathbf{r}(s)$来表示它的. 命s表示弧长,則

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

是一单位矢量. 这称为曲綫在点p的切綫矢量. 由于$\mathbf{t}$是单位矢量,所以$\frac{d\mathbf{t}}{ds}$与$\mathbf{t}$垂直, $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$告訴我們当弧长s变化时,方向$\mathbf{t}$的变化情况. 我們定义

$$k^2 = \frac{d\mathbf{t}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \quad 即 \quad k = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

这k称为曲綫(C)在p点的曲率,k是随着点而变的.

由

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}$$

所定义的单位矢量$\mathbf{n}$称为曲綫(C)在p点的主法綫的单位矢量. $\rho = \frac{1}{k}$称为曲率半径. 在任一点p, $\mathbf{t}$与$\mathbf{n}$是互相垂直的.

命

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n},$$

$\mathbf{b}$垂直于$\mathbf{t}$与$\mathbf{n}$,这样的$\mathbf{b}$称为次法綫方向的单位矢量(由于$\mathbf{t}$与$\mathbf{n}$是垂直的单位矢量,所以$\mathbf{b}$是单位矢量).

这三个与坐标軸有相同的定轉向的单位矢量$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$組成一个在曲綫$(C)$上$p$点的活动坐标架,而空間曲綫$(C)$在$p$点的其他任何矢量都可以在这坐标架上分解.

我們現在确定$\frac{d\mathbf{b}}{ds}$与$\frac{d\mathbf{n}}{ds}$的分解情况.

由$\mathbf{b}\cdot\mathbf{t} = 0$可得

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}\cdot\mathbf{t} + \mathbf{b}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0.$$

又因为$\mathbf{b}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = 0$,所以知道

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}\cdot\mathbf{t} = 0,$$

也就是$\frac{d\mathbf{b}}{ds}$是垂直于$\mathbf{t}$的矢量. 又因为$\mathbf{b}$是单位矢量,所以$\frac{d\mathbf{b}}{ds}$也垂直于$\mathbf{b}$. $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$既然垂直于$\mathbf{t}$与$\mathbf{b}$,它的方向就一定与$\mathbf{n}$相同. 因此

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\frac{1}{\tau}\mathbf{n}.$$

$\frac{1}{\tau}$ 称为这曲綫的挠率，τ 称为挠率半径(或第二曲率半径).

注意. $\frac{1}{\tau}$ 是可正可負的，这与 $\frac{1}{\rho}$ 总是非負的性质不同. 当然，这些矢量的存在是基于它們的微商存在性的.

再考虑 $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$. 由 $\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{t}$ 可知

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=\mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{t}}{ds}+\frac{d\mathbf{b}}{ds}\times\mathbf{t}=\mathbf{b}\times k\mathbf{n}+\frac{1}{\tau}\mathbf{n}\times\mathbf{t}=-k\mathbf{t}-\frac{1}{\tau}\mathbf{b}.$$

这样我們得出了著名的 Frenet-Serret 公式:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}\mathbf{n},\quad \frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{t}+\frac{1}{\tau}\mathbf{b}\right),\quad \frac{d\mathbf{b}}{ds}=\frac{1}{\tau}\mathbf{n}.$$

回到原来出发的坐标，假定单位矢量 $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$、$\mathbf{b}$ 对 x、y、z 軸的方向余弦如下表:

	x	y	z
$\mathbf{t}$	α	β	γ
$\mathbf{n}$	α_1	β_1	γ_1
$\mathbf{b}$	α_2	β_2	γ_2

則 Frenet-Serret 公式可以写成为

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{\rho},\quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta_1}{\rho},\quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{\rho}.$$

$$\frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha_2}{\tau},\quad \frac{d\beta_1}{ds}=-\frac{\beta}{\rho}-\frac{\beta_2}{\tau},\quad \frac{d\gamma_1}{ds}=-\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\gamma_2}{\tau},$$

及

$$\frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{1}{\tau}\alpha_1,\qquad \frac{d\beta_2}{ds}=\frac{1}{\tau}\beta_1,\qquad \frac{d\gamma_2}{ds}=\frac{1}{\tau}\gamma_1.$$

試考察曲率 $\frac{1}{\rho}$ 恆等于 0 的情况，即得

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\beta}{ds}=\frac{d\gamma}{ds}=0.$$

这說明了 α, β, γ 是常数. 由

$$\frac{dx}{ds}=\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\beta,\quad \frac{dz}{ds}=\gamma$$

可知，(C) 是一条直綫，即曲率等于 0 的曲綫是直綫.

再考虑挠率恆等于 0 的情况，即

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=0,$$

即 $\mathbf{b}=(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 是一常数矢量. 由于 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{t}$ 垂直，故

$$\alpha_2\frac{dx}{ds}+\beta_2\frac{dy}{ds}+\gamma_2\frac{dz}{ds}=0.$$

积分之，应得

$$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=\delta.$$

这說明挠率等于 0 的曲綫 (C) 是一条平面曲綫.

由矢量 $\mathbf{t}$ 与 $\mathbf{n}$ 所确定的平面称为曲綫的密切平面，$\mathbf{b}$ 是这平面的法綫方向.

§10. 原坐标表示法

命

$$\mathbf{r}=(x, y, z),$$

则

$$\mathbf{t}=\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right), \quad \mathbf{n}=\rho\left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}\right)=\rho\frac{d\mathbf{t}}{ds},$$

此处

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

又挠率

$$\frac{1}{\tau}=\frac{d\mathbf{b}}{ds}\cdot\mathbf{n}=\left(\mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}\right)\cdot\mathbf{n}=\left[\mathbf{t}\times\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right)\right]\cdot\rho\frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

$$=\rho\left(\mathbf{t}\times\frac{d\rho}{ds}\frac{d\mathbf{t}}{ds}+\mathbf{t}\times\rho\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\rho^2\left(\mathbf{t}\times\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

$\left(\text{因为}\ \mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{t}}{ds}\ \text{与}\ \frac{d\mathbf{t}}{ds}\ \text{垂直}\right)$，也就是

$$\frac{1}{\tau}=-\rho^2\left(\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}\times\mathbf{t}\right)\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}=-\rho^2\left(\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\times\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}.$$

注意 $(-\rho^2)$ 的系数是由三矢量

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}$$

所成的平行六面体的体积. 即

$$\left(\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\times\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\begin{vmatrix}x''' & y''' & z'''\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}.$$

以上的表达法是用弧长 s 来表达的，我們現在回到一般的参变数 t，即

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t),$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2.$$

可知

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^{1/2}},$$

所以

$$\frac{d^2t}{ds^2}=-\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^{3/2}}\frac{dt}{ds}=-\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}.$$

因而

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\varphi'(t)\frac{dt}{ds}\right)=\varphi''(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\varphi'(t)\frac{d^2t}{ds^2}$$
$$=\frac{\varphi''}{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}-\varphi'\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}.$$

同理得到 $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$, 因而得出

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2=\frac{\varphi''^2+\psi''^2+\chi''^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}$$
$$-2\frac{(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3}+\frac{(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3}$$
$$=\frac{(\varphi''^2+\psi''^2+\chi''^2)(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)-(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3}.$$

再由恆等式

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2$$
$$=(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2$$

或

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\end{vmatrix}=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2$$

可知

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\bar{A}^2+\bar{B}^2+\bar{C}^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3},$$

而

$$\bar{A}=\psi'\chi''-\psi''\chi',\quad \bar{B}=\chi'\varphi''-\varphi'\chi'',\quad \bar{C}=\varphi'\psi''-\psi'\varphi''.$$

密切平面的公式可由它垂直于 $\mathbf{b}$ 得之. 由 $\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$, 卽

$$\mathbf{b}=\rho\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\times\left(\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2},\frac{d^2z}{ds^2}\right),$$

所以 $\mathbf{b}$ 的三个支量与

$$A=\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2},$$
$$B=\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2},$$
$$C=\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$$

成比例,所以密切平面的方程是

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

我們已經知道

$$\frac{dx}{ds}=\varphi'\frac{dt}{ds},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\varphi''}{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}-\varphi'\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2},$$

等等，所以

$$A=\{\psi'[\chi''(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)-\chi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')]-$$
$$-\chi'[\psi''(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)-\psi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')]\}\cdot$$
$$\cdot\frac{\frac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}=(\psi'\chi''-\chi'\psi'')\frac{\frac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)}.$$

同样得出

$$B=(\chi'\varphi''-\varphi'\chi'')\frac{\frac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)},$$

$$C=(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')\frac{\frac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)}.$$

因此得出

$$A:B:C=(\psi'\chi''-\chi'\psi''):(\chi'\varphi''-\varphi'\chi''):(\varphi'\psi''-\psi'\varphi''),$$

即密切平面方程是

$$\begin{vmatrix} X-\varphi & Y-\psi & Z-\chi \\ \varphi' & \psi' & \chi' \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' \end{vmatrix}=0.$$

現在容易証明：在曲綫上取三点 t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$，过这三点作一平面，当 $\Delta t\to 0$ 时，即得密切面。

§ 11. 螺 旋 綫

設有一柱面，其母綫平行于 z 軸，xy 平面截取柱面所得的曲綫是

$$(l)\quad x=\varphi(\sigma),\quad y=\psi(\sigma),$$

此处 σ 是 (l) 的弧长，它的起点是 A. 在 (l) 上取某点 N，作綫段 NM 平行于 z 軸. 若

$$NM=k\sigma,$$

此处 k 为常数，σ 为 (l) 弧的长度，点 M 的軌迹 (L) 就被称为螺旋綫.

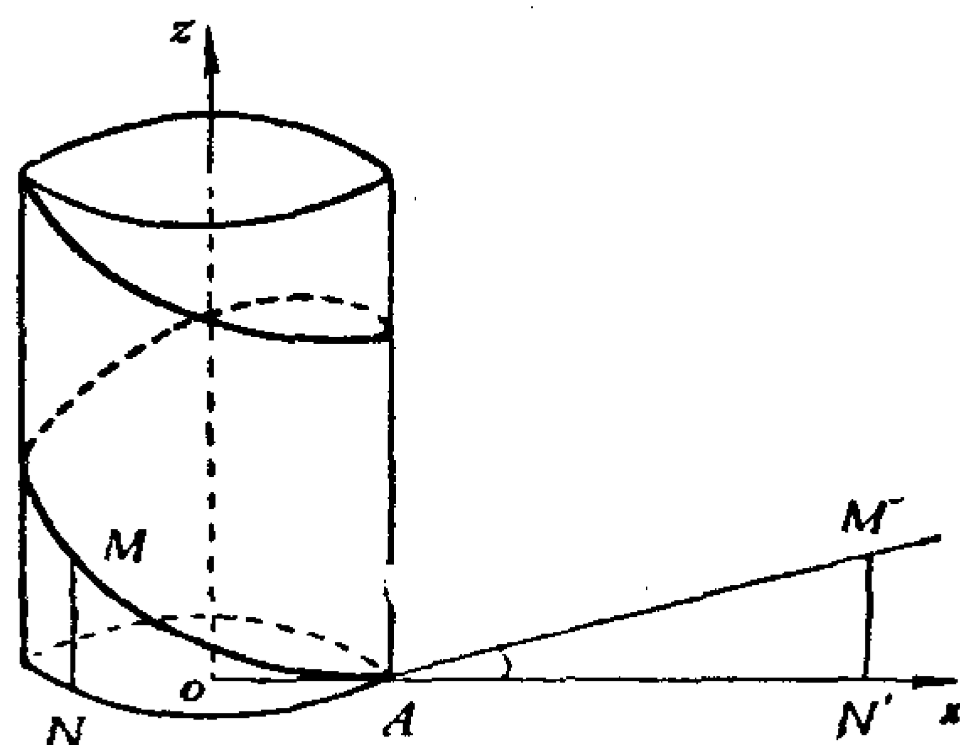


图 43

以下我們将討論螺旋綫的若干性質：

1) 螺旋綫的切綫与某一确定的方向成定角.

証. (L) 的参数表示是

$$x=\varphi(\sigma),\quad y=\psi(\sigma),\quad z=k\sigma.$$

以 A 作为 (L) 的起算点，s 为 (L) 的弧长. 由于 (l) 上切綫的方向余弦是 $[\varphi'(\sigma),\psi'(\sigma)]$，所以

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=[\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma)+k^2]d\sigma^2=(1+k^2)d\sigma^2$$

$$ds = \sqrt{1+k^2}d\sigma, \quad s = \sqrt{1+k^2}\sigma.$$

我們来考察（L）上切綫与 z 軸所成的角度的余弦 γ:

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

明所欲証.

2）螺旋綫上任一点的主法綫与母綫垂直.

証. 由 Frenet-Serret 定理可知

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{\rho} = 0,$$

即 $\gamma_1 = 0$. 故明所欲証.

3）沿螺旋綫、曲率半径与撓率半径之比为常数，特别当柱面是圓柱面时，曲率与撓率都是常数.

証. 螺旋綫的活动标架与 z 軸所成的角度的余弦 $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$. 因 $\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=1$ 及 γ, γ_1 为常数，故 γ_2 亦为常数，故由 Frenet-Serret 公式可知

$$-\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\gamma_2}{\tau} = 0.$$

因此 $\frac{\rho}{\tau}$ 是个常量.

又以 r 表示（l）的曲率半径，則

$$\frac{1}{r^2} = \varphi''^2(\sigma) + \psi''^2(\sigma).$$

由 $ds = \sqrt{1+k^2}d\sigma$ 有

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \left[\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2\right]\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^4$$

$$= \frac{\varphi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2} + \frac{\psi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2} = \frac{1}{(1+k^2)^2r^2},$$

即

$$\rho = (1+k^2)r.$$

若（l）是圓周，則 r 为常数. 因此 ρ 与 τ 都为常数.

联接曲面上两点，使距离最短的曲面上的曲綫称为曲面上的短程綫. 平面上的短程綫就是直綫.

4）柱面上的短程綫就是螺旋綫.

証. 繞着通过 A 的母綫，把柱面在 xz 平面上鋪平，則 AN 与 NM 之比为 $\frac{1}{R}$，故螺旋綫就是 xz 平面上的直綫，而将柱面鋪平时，柱面上曲綫的距离是不变的. 故明所欲証.

§12. 空間曲綫的唯一性定理

定理 1. 具有相同弧长 s，曲率 $f(s) > 0$ 及撓率 $g(s)$ 的曲綫，可以經过运动（坐标軸

的平移及轉动)使一条搬到另一条.

證. 設 c 与 c' 是具有相同弧长、曲率及挠率的二曲綫,設这二曲綫弧长的起算点各为 o, o'. 先行一个运动,使 o' 变到 o、c' 上的点 o' 的活动标架变为 c 上的点 o 的活动标架. 若經过运动后,c' 变为 $\bar{c}$,而 c 与 $\bar{c}$ 在弧长 s 对应的点的活动标架各矢量的方向余弦各为

	x	y	z
t	α	β	γ
n	α_1	β_1	γ_1
b	α_2	β_2	γ_2

与

	x	y	z
t	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$
n	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\gamma}_1$
b	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\gamma}_2$

由 Frenet-Serret 公式得

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{\rho},\quad \frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha_2}{\tau},\quad \frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{\alpha_1}{\tau},$$

$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds}=\frac{\bar{\alpha}_1}{\rho},\quad \frac{d\bar{\alpha}_1}{ds}=-\frac{\bar{\alpha}}{\rho}-\frac{\bar{\alpha}_2}{\tau},\quad \frac{d\bar{\alpha}_2}{ds}=\frac{\bar{\alpha}_1}{\tau},$$

此处

$$\rho=\frac{1}{f(s)},\quad \tau=\frac{1}{g(s)}.$$

所以

$$\frac{d}{ds}(\alpha\bar{\alpha}+\alpha_1\bar{\alpha}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_2)=0.$$

于是

$$\alpha\bar{\alpha}+\alpha_1\bar{\alpha}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_2=c\quad (c\ 为常数).$$

当 $s=0$ 时, $\alpha=\bar{\alpha}$, $\alpha_1=\bar{\alpha}_1$, $\alpha_2=\bar{\alpha}_2$ 且 $\alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$(此乃由于 α, α_1, α_2 可以看作是沿 x 軸的单位矢量在活动标架上的投影). 因此

$$\alpha\bar{\alpha}+\alpha_1\bar{\alpha}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_2=1,$$

故

$$(\alpha-\bar{\alpha})^2+(\alpha_1-\bar{\alpha}_1)^2+(\alpha_2-\bar{\alpha}_2)^2=0.$$

所以

$$\alpha=\bar{\alpha},\quad \alpha_1=\bar{\alpha}_1,\quad \alpha_2=\bar{\alpha}_2.$$

同样得到

$$\beta=\bar{\beta},\quad \beta_1=\bar{\beta}_1,\quad \beta_2=\bar{\beta}_2,$$

$$\gamma=\bar{\gamma},\quad \gamma_1=\bar{\gamma}_1,\quad \gamma_2=\bar{\gamma}_2.$$

又两曲綫在对应点有同一弧长 s, 故

$$\frac{dx}{ds}=\alpha=\bar{\alpha}=\frac{d\bar{x}}{ds},\quad \frac{dy}{ds}=\frac{d\bar{y}}{ds},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{d\bar{z}}{ds},$$

$$x=\bar{x}+c_1,\quad y=\bar{y}+c_2,\quad z=\bar{z}+c_3,$$

此处 c_1, c_2 与 c_3 都是常数. 当 $s=0$ 时, $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}$, $z=\bar{z}$. 因此 $c_1=c_2=c_3=0$. 故得定理.

关于空間曲綫的存在性問題，即任意給了两个連續函数 $f(s)>0$ 及 $g(s)$, 問是否存

在一条空間曲綫以 s 为弧长，$f(s)$ 为曲率，$g(s)$ 为挠率？

我們可以从定理 13.24.1 中推出

定理 2. 已給連續函数 $f(s)>0$ 及 $g(s)$，設 $p_0(p=p_0)$ 为空間任意点，α_0、β_0、γ_0 为任意三个右旋的彼此垂直的单位矢量，則一定存在一条空間曲綫以 s 为弧长，$f(s)$ 为曲率，$g(s)$ 为挠率，而且它的始点是 p_0，即

$$\mathbf{r}(s_0)=\mathbf{r}_0$$

在 p_0 点的活动坐标架的基本分量是

$$\alpha(s_0)=\alpha_0,\quad \beta(s_0)=\beta_0,\quad \gamma(s_0)=\gamma_0.$$

証. 解方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\alpha}{ds}=f(s)\beta,\\ \dfrac{d\beta}{ds}=-f(s)\alpha-g(s)\gamma,\\ \dfrac{d\gamma}{ds}=+g(s)\beta,\end{cases}$$

其初始条件为

$$\alpha(s_0)=\alpha_0,\quad \beta(s_0)=\beta_0,\quad \gamma(s_0)=\gamma_0.$$

由 § 13.24 得到一組唯一的解.

命

$$\alpha^*=\beta\times\gamma,\quad \beta^*=\gamma\times\alpha,\quad \gamma^*=\alpha\times\beta,$$

則

$$\frac{d\alpha^*}{ds}=\frac{d\beta}{ds}\times\gamma+\beta\times\frac{d\gamma}{ds}=f(s)\beta^*,$$

$$\frac{d\beta^*}{ds}=\frac{d\gamma}{ds}\times\alpha+\gamma\times\frac{d\alpha}{ds}=-f(s)\alpha^*-g(s)\gamma^*,$$

$$\frac{d\gamma^*}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}\times\beta+\alpha\times\frac{d\beta}{ds}=+g(s)\beta^*,$$

且可以証明

$$\alpha^*(s_0)=\alpha_0,\quad \beta^*(s_0)=\beta_0,\quad \gamma^*(s_0)=\gamma_0.$$

故由解的唯一性定理知，

$$\alpha^*=\alpha,\quad \beta^*=\beta,\quad {}^*\gamma=\gamma,$$

即 α，β，γ，組成彼此垂直的右旋单位矢量.

从

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\alpha$$

解出

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\int_{s_0}^{s}\alpha(s)ds,$$

这就是我們所要求的曲綫. 事实上，如果这条曲綫的曲率为 $\bar{f}(s)$，挠率为 $\bar{g}(s)$，其基本向量为 $\bar{\alpha}(s)$，$\bar{\beta}(s)$，$\bar{\gamma}(s)$，則

$$\bar{\alpha}(s)=\frac{d\bar{r}}{ds}=\alpha(s),$$

而

$$\bar{f}(s)\bar{\beta}=\frac{d\bar{\alpha}}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}=f(s)\beta.$$

但

$$\bar{f}(s)>0,\quad f(s)>0,$$

故

$$\bar{f}(s)=f(s),\quad \bar{\beta}=\beta.$$

于是

$$\bar{\gamma}=\bar{\alpha}\times\bar{\beta}=\alpha\times\beta=\gamma.$$

而

$$\bar{g}(s)\bar{\beta}=\frac{d\bar{\gamma}}{ds}=\frac{d\gamma}{ds}=g(s)\beta.$$

故

$$\bar{g}(s)=g(s).$$

証毕.

事实上,定理 2 的唯一性就是定理 1,但定理 1 的証明更直接些.

§13. 曲率圆与曲率球

設曲綫的参数表示是

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad z=z(s),$$

此处 s 为弧长. 过曲綫上三点 $P(s)$, $Q(s+\Delta s)$, $R(s+2\Delta s)$ 作球[1],当 $\Delta s\to 0$ 时,此球的极限位置满足以下三关系式(参看 §5):

$$[x(s)-a]^2+[y(s)-b]^2+[z(s)-c]^2=R^2, \tag{1}$$

$$[x(s)-a]\alpha(s)+[y(s)-b]\beta(s)+[z(s)-c]\gamma(s)=0, \tag{2}$$

$$[x(s)-a]\alpha_1(s)+[y(s)-b]\beta_1(s)+[z(s)-c]\gamma_1(s)=-\rho. \tag{3}$$

故由 (2) 可知,球心在垂直于切綫的平面上. 由 (3) 可知,球心至曲綫上点的綫段在主法綫上的投影长度为曲率半径.

特别当球心在密切平面上时,则中心坐标应为

$$a=x(s)+\rho\alpha_1(s),\quad b=y(s)+\rho\beta_1(s),\quad c=z(s)+\rho\gamma_1(s).$$

此点称为曲率中心,这一球的球面与密切平面的交綫是一圓,称为曲率圓或密切圓. 此圓的半径为 ρ, 曲率中心的軌迹称之为曲綫的漸屈綫.

現在决定一个球, 通过曲綫点 $P(s)$ 及其三邻近点 $Q(s+\Delta s)$, $R(s+2\Delta s)$, $T(s+3\Delta s)$, 当 $\Delta s\to 0$ 时,这球的极限位置除满足 (1), (2), (3) 外,还满足

$$[x(s)-a]\alpha_2(s)+[y(s)-b]\beta_2(s)+[z(s)-c]\gamma_2(s)=\tau\rho'. \tag{4}$$

由 (2), (3), (4) 可以决定球心 (a,b,c). 現在引入局部坐标 (A,B,C), 即满足方程組的三数:

$$a=x(s)+A\alpha(s)+B\alpha_1(s)+C\alpha_2(s), \tag{5}$$

---

1) 过三点可作无穷多个球,而今为其中之任一个.

$$b = y(s) + A\beta(s) + B\beta_1(s) + C\beta_2(s), \tag{6}$$

$$c = z(s) + A\gamma(s) + B\gamma_1(s) + C\gamma_2(s). \tag{7}$$

将(5), (6), (7)三式分别乘以 $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$, 然后相加得

$$A = [a - x(s)]\alpha(s) + [b - y(s)]\beta(s) + [c - z(s)]\gamma(s) = 0.$$

同理得

$$B = \rho, \quad C = -\rho'\tau.$$

故得球心的坐标为

$$a = x(s) + \rho\alpha_1(s) - \tau\rho'\alpha_2(s),$$
$$b = y(s) + \rho\beta_1(s) - \tau\rho'\beta_2(s),$$
$$c = z(s) + \rho\gamma_1(s) - \tau\rho'\gamma_2(s).$$

球的半径为

$$\rho^2 + \left(\tau \frac{d\rho}{ds}\right)^2,$$

这一球称为曲率球或密切球.

§14. 曲面族与空間曲綫族的包絡

把§7所講的推广到空間.

1) 先研究带一个参变量的曲面族

$$S_a \qquad \Phi(x, y, z, a) = 0. \tag{1}$$

曲面族中一曲面 $\Phi(x, y, z, a_0) = 0$ 上,如果有一点 (x_0, y_0, z_0), 矢量

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

是零矢量,則点 (x_0, y_0, z_0) 称为曲面族 $\Phi(x, y, z, a) = 0$ 的奇点. 在奇点上該曲面沒有确定的切平面.

对 a 微分得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = 0. \tag{2}$$

从(1)与(2)消去 a 得一曲面 S. 假設曲面 S 不包含曲面族(1)的奇点. 对一个固定的数值 a_0, 曲面族中有一曲面 S_{a_0}, 与 S 交于一条曲綫 l_0. 我們現在証明,沿着 l_0, S 与 S_{a_0} 有公共切面.

在 S_{a_0} 上 a 是常量 a_0, 所以

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz = 0.$$

在曲面 S 上 a 是变量,我們应当写成

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz + \frac{\partial\Phi}{\partial a}da = 0.$$

由(2), 这两个关系全同,因此 S_{a_0} 与 S 上公共点的无穷小改变 $[dx, dy, dz]$ 与矢量

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

垂直，所以 S_{a_0} 与 S 沿 l_0 相切。

因此，由 (1) 与 (2) 消去 a 所得出的方程，只要奇点不适合这个方程，那末它就是包絡，这儿相切性是沿某一曲綫相切的。

例. 球心在 z 軸上，半径为常数 r 的球面族

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = r^2.$$

对 a 求微商，得

$$-2(z - a) = 0.$$

消去 a，得柱面

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

而相切的綫是一个圓周。

2) 考虑有两个参变量的曲面族

$$F(x, y, z, a, b) = 0. \tag{3}$$

从

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0 \tag{4}$$

中消去 a, b，得出曲面 S. 不难証明，它与曲面族 (3) 相切，现在是点相切，而不是綫相切. 实际上，对固定的 $a = a_0$, $b = b_0$，一方面我們得到 (3) 中的一确定曲面 S_0，而另一方面，把 $a = a_0$ 及 $b = b_0$ 代入 (3)(4)，一般得出 S 上的一点 M_0，而点 M_0 就是 S 与 S_0 的公共点。

例. 球心在 x, y 平面上、半径为常数 r 的球面

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2.$$

对 a, b 求偏微商得

$$-2(x - a) = 0, \quad -2(y - b) = 0.$$

消去 a 与 b 得 $z^2 = r^2$，就是說，平面 $z = \pm r$ 是包絡. 包絡和每一个球都于一点相切。

附記. 与曲綫的情况相同，从 (3)，(4) 消去所得出来的曲面可能不是包絡，而是奇异点的軌迹。

3) 考虑一个参变数的空間曲綫族

$$F_1(x, y, z, a) = 0, \quad F_2(x, y, z, a) = 0 \tag{5}$$

能否有包絡？即能否找出曲綫 Γ，在它所有点与 (5) 中的各曲綫相切？

我們可以把 (5) 作为 Γ 的定义方程及其中 a 非常数而是变量. 沿 (5) 得

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz = 0.$$

而沿 Γ，則

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a=0.$$

如果相切,则

$$\frac{\delta x}{dx}=\frac{\delta y}{dy}=\frac{\delta z}{dz}.$$

因而得出

$$\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0,\quad \frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a=0.$$

当 a 非常量,即 $\delta a\neq 0$, 我們有

$$\frac{\partial F_1}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial F_2}{\partial a}=0. \tag{6}$$

一般説来,四个方程不能确立一条曲綫,也就是説,空間的曲綫族沒有包絡.

但如果四个中的一个可由其他三个推出来,则我們可以确立一条空間曲綫,即把 x, y, z 表为参变量 a 的函数. 这样,我們就具有包絡了. 当然,这条空間曲綫也可能是曲綫族(5)的奇异点的軌迹.

第十五章　重 积 分

§1. 重积分的定义

假定 $f(x, y)$ 是一个在矩形

$$(R) \qquad a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上定义了的函数. 对区間 $[a, b]$ 中的任一点 x,假定积分

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy, \ a \leqslant x \leqslant b \tag{1}$$

存在,并且假定积分

$$\int_a^b F(x)dx \tag{2}$$

也存在,如此我們可以算出

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx. \tag{3}$$

这数值被称为 $f(x, y)$ 在矩形 (R) 上的迭次积分,先对 y 求积分, 再对 x 求积分而得出的迭次积分.

如果 $f(x, y)$ 在 R 上是連續的, 則 (1) 的存在性是沒有問題的, 而所定义的 $F(x)$ 也是在 $[a, b]$ 上的連續函数,因此 (2) 也是存在的. 所以任何一个連續函数的迭次积分是存在的. 但是我們这儿并沒有說明,这个数值是否也就是先对 x 求积分,再对 y 求积分所得出的数值,卽

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx \quad 与 \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right)dy$$

是否相等的問題.

由单变数的情况可知,我們所用的連續性是可以减弱的.

我們現在回顾一下积分 (3) 的意义,利用分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d,$$

把矩形 R 分成为 mn 个小矩形

$$(R_{ij}) \qquad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \quad y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}.$$

积分 (2) 等于

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i')\Delta x_i$$

的极限, 此处 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 及 x_i' 是区間 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 中的任一点. 而所謂极限是指

当 $\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i \to 0$ 的情况而言．但是为了簡便起見，我們用以下的符号：

$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{n \to \infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i')\Delta x_i\right).$$

又

$$F(x_i') = \int_c^d f(x_i', y)dy$$

是

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(x_i', y_j')\Delta y_j, \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$$

的极限，而 y_j' 是 $y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}$ 中的任一点．总之，迭次积分

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx = \lim_{n \to \infty}\left(\lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_i', y_j')\Delta x_i \Delta y_j\right).$$

这样很明显地指出，两个迭次积分是否相等的問題便是两个极限交换的問題． 重积分的概念便与重极限的概念相仿，可以述之如下：

假定 $f(x, y)$ 是 R 中的有界函数．考虑和

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_i', y_j')R_{ij}, \tag{4}$$

此处 R_{ij} 是矩形 (R_{ij}) 的面积，(x_i', v_j') 是 R_{ij} 中的任一点． 如果“网眼”无限变小，即 $\max|\Delta x_i| \to 0$，$\max|\Delta y_j| \to 0$，并且对 R_{ij} 中的任一 (x_i', y_j')，(4) 的极限是存在的，而且是唯一的，則 $f(x, y)$ 在 (R) 上称为可求积的，而以

$$\iint\limits_{(R)} f(x, y)dR$$

表示这极限的数值．这数值被称为 $f(x, y)$ 过 (R) 的积分．

与单变数相仿，我們定义

$$S = \Sigma M_{ij}R_{ij},\ M_{ij} = \overline{\underset{(x,y)\in R_{ij}}{Bd}} f(x, y)$$

及

$$s = \Sigma m_{ij}R_{ij},\ m_{ij} = \underline{\underset{(x,y)\in R_{ij}}{Bd}} f(x, y).$$

与单变数相仿，我們能証明：对任一有界函数，S 与 s 的极限是一定唯一存在的，因而有

定理 1. $f(x, y)$ 在 (R) 上的重积分存在的必要且充分条件是

$$\Sigma(M_{ij} - m_{ij})R_{ij} \tag{5}$$

的极限等于 0，极限的意义是指网眼无限分細而言．

显然有以下的一批可积函数．

1) 在 (R) 上連續的函数一定是可积的．

2) 如果 $f(x, y)$ 在 R 上有有限个間断点，或者 $f(x, y)$ 的間断点出現在有限多条簡单曲綫上，則 $f(x, y)$ 也是可积的．什么叫做簡单曲綫？这曲綫有一个参变数表示法

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{6}$$

此处 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 是 t 的有連續微商的函数，且仅有有限个极大极小.

我們討論仅有一条簡单曲綫上有間断点的情况，一般的情况也不难推得.

我們可以把曲綫 (σ) 分成为有限份，其中每一份所对应的 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都是单調的(由于 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 仅有有限个极大极小). 我們不妨假定 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都是不下降的函数. 在网格 (R_{ij}) 中考虑这条曲綫所穿过的情况. 如果曲綫从一个格子中穿出，仅有两个可能性，一是向上穿出，一是向右穿出，如右图(由右上角穿出的情况也不难处理). 这些被曲綫所穿过的矩形的总面积一定不大于

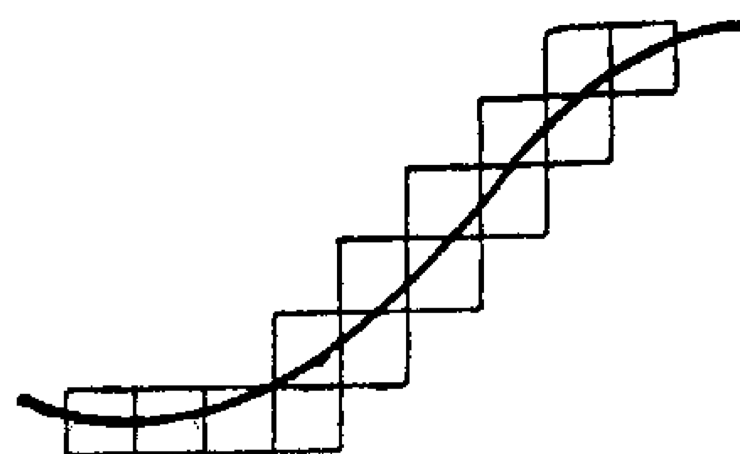


图 44

$$\Delta x_0(d-c)+\Delta y_0(b-a)$$

(也就是把这些"砖"向左平移，移到 $x=a$，如果已有"砖"在，則向上平移，結果不超过最左一条及最上一条的面积)，此处

$$\Delta x_0=\max(\Delta x_i),\quad \Delta y_0=\max(\Delta y_i).$$

由于 $f(x, y)$ 是有界的，卽有 M，使 $|f(x, y)|\leqslant M$. 作和

$$T=\sum f(x_i', y_i')R_{ij}',$$

此处 (R_{ij}') 过那些被曲綫所穿过的方格，显然有

$$|T|\leqslant M[\Delta x_0(d-c)+\Delta y_0(b-a)].$$

当格子无限变細后，$T\to 0$. 由此得証.

这証明不但对一条簡单曲綫对，也可以証明对有限条簡单曲綫也对. 同时、也証明了：如果在有限条簡单曲綫上改变 $f(x, y)$ 的数值，并不影响原来积分的数值.

与重极限及迭次求极限相似的方法，可以証明：如果 $f(x, y)$ 在 (R) 上可求积，而且 (1) 与 (2) 存在，則

$$\iint\limits_{(R)} f(x, y)dR=\int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx.$$

命 (σ) 是 (x, y) 平面上的一个有界域，$F(x, y)$ 是在 (σ) 上定义了的有界函数，我們不妨假定 (σ) 就包在一个矩形 (R) 之中，在 (R) 上我們定义

$$f(x, y)=\begin{cases}F(x, y), & \text{当 } (x, y) \text{ 属于 } (\sigma),\\ 0, & \text{当 } (x,y) \text{ 不属于 } (\sigma).\end{cases}$$

如果 $f(x, y)$ 在 (R) 上是可积函数，則我們称 $F(x, y)$ 在 (σ) 是可积函数，而且定义

$$\iint\limits_{(\sigma)} F(x, y)d\sigma=\iint\limits_{(R)} f(x, y)dR.$$

如果 (σ) 的边界是一条閉曲綫 c，任一平行于 y 軸的直綫至多交这曲綫于两点，这曲綫在 $x=a$ 与 $x=b$ 之間，并且 $x=a$ 及 $x=b$ 都与 c 有公共点，上一部分的曲綫方程是 $y=\varphi_1(x)$，下一部分的曲綫方程是 $y=\varphi_2(x)$.

由前已証明的結果

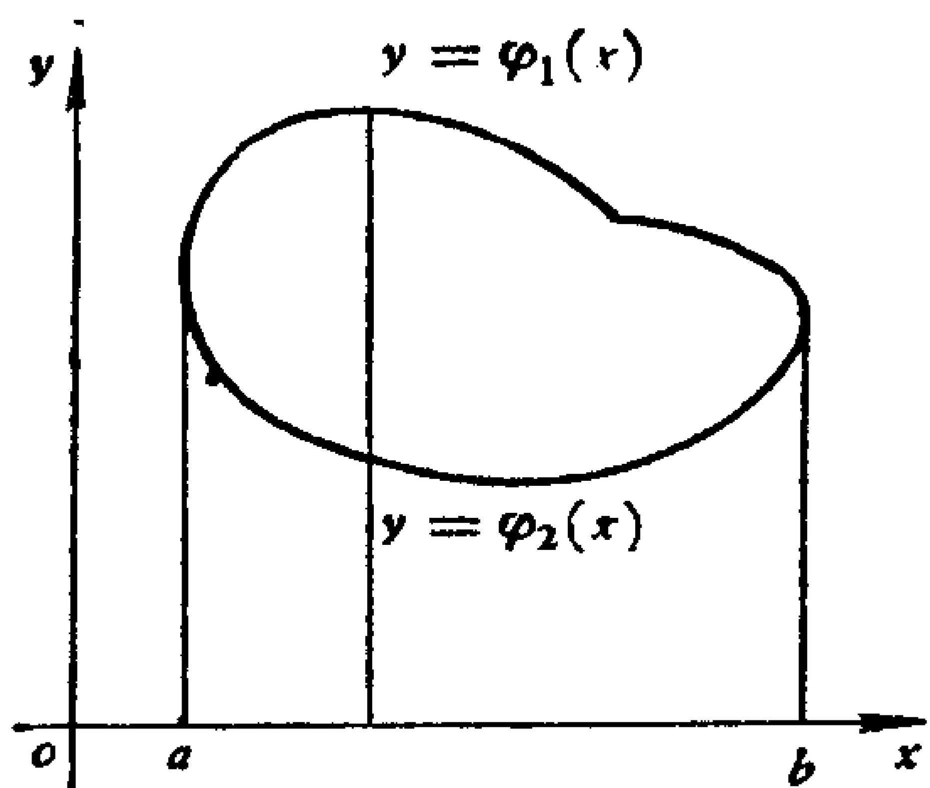


图 45

$$\iint\limits_{(R)} f(x, y)dR = \int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx$$

$$= \int_a^b\left(\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} F(x, y)dy\right)dx,$$

可知,如果对任一 x,

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} F(x, y)dy \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

存在,而且

$$\int_a^b \Phi(x)dx$$

存在,则

$$\iint\limits_{(\sigma)} F(x, y)d\sigma = \int_a^b\left(\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} F(x, y)dy\right)dx.$$

§ 2. 可求面积的域

命 (σ) 代表平面上的一个有限域. 不妨假定它是在一个矩形 (R) 之中,定义函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ 如果 } (x, y) \text{ 属于 } (\sigma), \\ 0, \text{ 如果 } (x, y) \text{ 不属于 } (\sigma). \end{cases}$$

如果 $f(x, y)$ 在 (R) 上是一个可积函数,则 (σ) 称为可求面积的域,而积分

$$\iint\limits_{(R)} f(x, y)dR$$

就定义为域 (σ) 的面积.

依照重积分的定义, S 就等于与 (σ) 有公共点的长方形 (R_{ij}) 的总面积,而 s 就等于完全处于 (σ) 內的长方形 (R_{ij}) 的总面积,而 $S-s\to 0$ 的意义便是与 (σ) 边界相交的长方形 (R_{ij}) 的总面积趋于零,而这也就是 (σ) 可求面积的必要且充分的条件.

S 所趋的极限我們也称为 (σ) 的外面积,而 s 所趋的极限称为 (σ) 的內面积,因此,外面积与內面积相等也是一域 (σ) 可求面积的必要且充分的条件.

如果 (σ) 的边界是可度长的,而且长度是有限的曲綫,则 (σ) 是可求面积的. 因此,正方形(任意位置的正方形),圓,椭圓等都是可求面积的图形. 但是必須指出,我們并沒有証明,現在所定义的面积并不因坐标系的选择而变化,卽如:一个斜放了的单位正方形的面积是否也等于 1 ,我們并沒有証明.

但是我們知道,两个沒有公共部份的区域如果都可求面积,则这两个面积的和也就等于这两个区域拼成的域的面积. 如果一个区域在另一个区域之內,则前者面积不大于后者的面积.

为了要証明我們所定义的面积是和坐标系的选择无关,我們先証明一个最簡单的特例.

定理 1. 边平行于坐标軸的正方形繞原点旋轉和平移后,它的面积保持不变.

証. 正方形显然有平移不变的性質.

其次我們以原点为中心，作一单位圓，依 $x, y = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots$ 作平行于 x, y 軸的网格。命 I 代表完全在圓內的方块数，E 代表与圓有公共点的方块数，则

$$qI < \text{圓面积} < qE,$$

此处 q 代表平行于 x, y 軸边长等于 $1/n$ 的正方形的面积，并且已知

$$\text{圓面积} = \lim_{n\to\infty} q\cdot I = \lim_{n\to\infty} q\cdot E.$$

依中心旋轉，旋轉后的这样方形的面积命之为 q'，则我們也有

$$q'\cdot I < \text{圓面积} < q'\cdot E,$$

$$\text{圓面积} = \lim_{n\to\infty} q'\cdot I = \lim_{n\to\infty} q'\cdot E.$$

命 $q/q' = \delta$，則立刻得出 $\delta = 1$，卽正方形的面积不因旋轉而变.

現在我們可以証明，面积与坐标軸无关这一性質，卽証明，先固定两条互相垂直的綫，平行于这两直綫作网格，这样得出的面积是不因选择原来的二綫而变的. 实际上，我們将証明更一般的定理.

定理 2. 把平面分为可求面积的区域 (Δv)，其中每一个区域的直径[1] 都不超过某一数 d，并且平面上任一个有界区域只与有限个这样的区域有公共点，这样定义了較一般的网格. 我們現在考虑一个区域 (P)，都在 (P) 的內部的 (Δv) 区域的面积之和，記之为 $\mathscr{T}$，那些与 (P) 有公共点的 Δv 区域的面积之和，記之为 $\mathscr{E}$，如此則当 $d\to 0$ 时，$\mathscr{T}$ 趋向內面积，而 $\mathscr{E}$ 趋于外面积.

这說明了，任意的网，只要 $d\to 0$，都可以用来量面积，而且算出来的結果是一样.

証. 如果 (Δv) 就是平行于两軸距离等于 d 的正方形的网所对应的 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{T}$ 用 E 及 I 表它們. 前已証明过 E 趋于外积分 A，而 I 趋于內积分 a.

由 a 的定义，对任一 $\varepsilon > 0$，可以有一种正方形的网，使 $I > a - \varepsilon$，命 λ 代表 (I) 的边界与 (P) 边界的距离（卽各取一点的最短的距离，由于 (Δv) 是 P 的內点集，而且 (Δv) 是閉的. 所以 $\lambda > 0$），如果取 $d < \frac{1}{2}\lambda$，則与 (I) 有公共点的 (Δv) 一定位于 (P) 的內部，同时 (I) 也在 $(\mathscr{T})$ 之中，所以（当 $d\to 0$ 时）$\mathscr{T} > a - \varepsilon$.

再証 $\mathscr{T} \leqslant a$，取任一个 $(\mathscr{T})$，命 λ' 代表 $(\mathscr{T})$ 的边界与 (P) 的边界的距离，作出具有 $\delta = \frac{1}{2}\lambda'$ 为边长的正方形网格，任何这样的与 $(\mathscr{T})$ 有公共点的正方形是由 (P) 的內点所組成的，就是

$$\mathscr{T} \leqslant I \leqslant a.$$

由不等式 $a - \varepsilon < \mathscr{T} \leqslant a$ 及其中 ε 的任意性，可知 $\mathscr{T} \to a$.

同法可証，当 $d\to 0$ 时，$\mathscr{E} \to A$.

定理 3. 面积不因旋轉而变化.

这定理是定理 1 与定理 2 的推論.

---

1) 有界区域的直径是指域内任两点的距离的确上界.

§ 3. 重积分换坐标

重积分

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y)dx\,dy$$

可以视为网格的面积 $\Delta x\Delta y$ 乘上在这网格中一点 (x, y) 的函数值 $f(x,y)$ 的总和的极限，而 $dx\,dy$ 称为在笛卡儿坐标下的面积元素.

在极坐标中,网格的面积(图 46)等于

$$\frac{1}{2}[(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\theta-\rho^2\Delta\theta]\doteq\rho\Delta\rho\Delta\theta$$

(略去高阶項),所以 $\rho d\rho\, d\theta$ 也可以称为极坐标下的面积元素,因而得出

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y)dx\,dy=\iint_{(\sigma)} F(\rho, \theta)\rho d\rho\, d\theta.$$

这儿 $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.

特别,当 $f(x, y)=1$ 的情况,我們有

$$\int_\alpha^\beta\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho d\rho\, d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(\rho_2^2-\rho_1^2)d\theta.$$

取 $\rho_2=\rho$ 及 $\rho_1=0$, 即得我們前所已知的极坐标求面积的公式.

更一般些,依照

$$\varphi(x, y)=u,\quad \psi(x, y)=v \tag{1}$$

引进新变量 u 与 v 来代替 x 与 y, 并且假定由方程 (1) 可以解出

$$x=\varphi_1(u, v),\quad y=\psi_1(u, v), \tag{2}$$

而且成一一对应的关系.

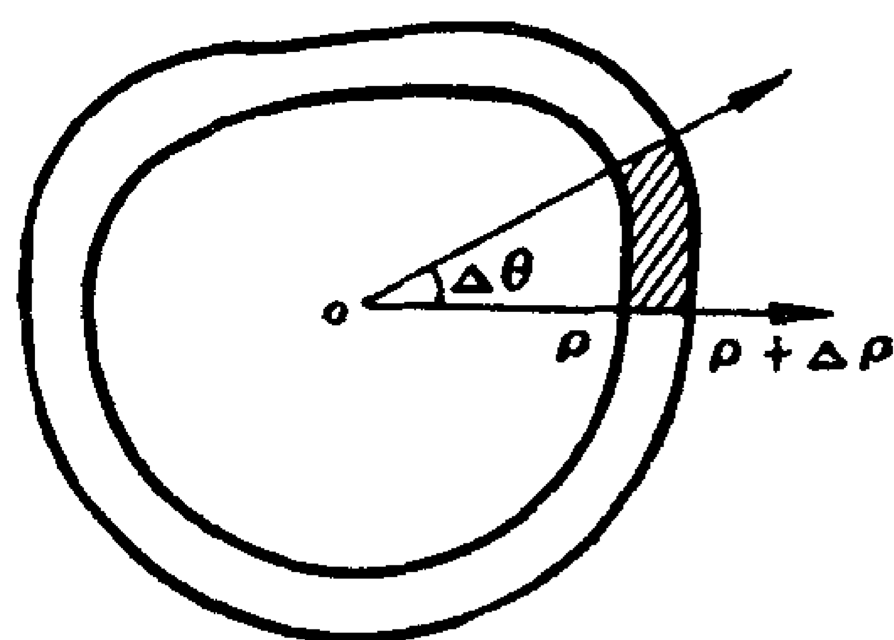


图 46

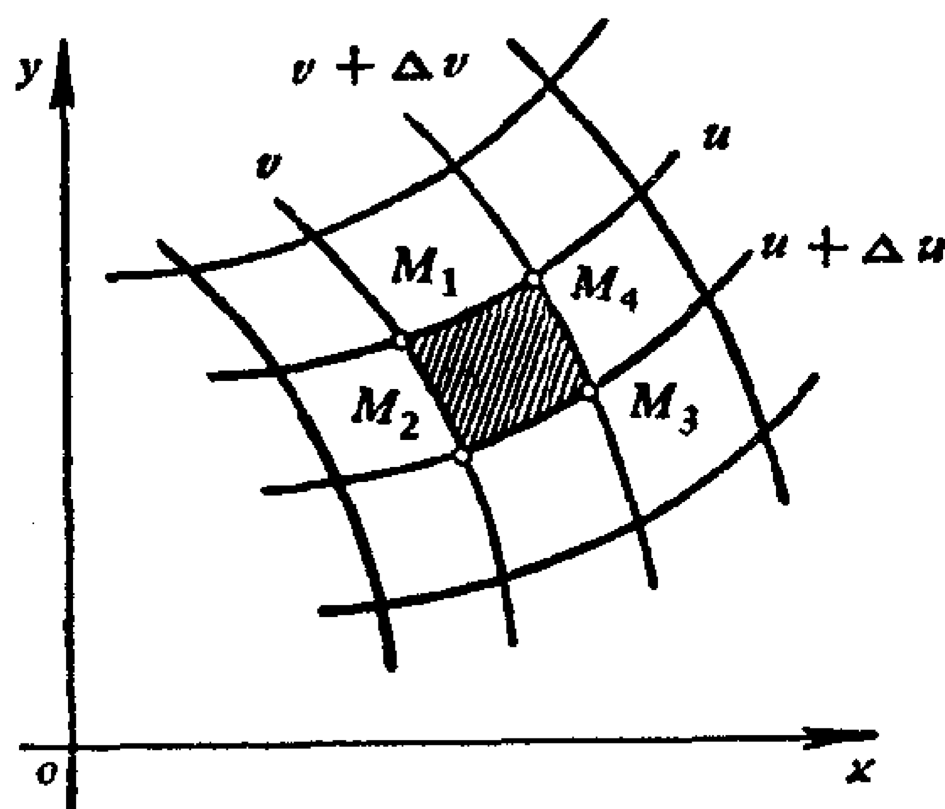


图 47

我們現在来确定用曲綫坐标 (u, v) 时的面积元素 $d\sigma$.

我們考虑两对邻近的坐标曲綫

$$\varphi(x, y)=u,\quad \varphi(x, y)=u+\Delta u,$$

$$\psi(x, y)=v,\quad \psi(x, y)=v+\Delta v.$$

我們計算这些綫之中的面积,也就是要求出 $M_1M_2M_3M_4$ 的面积(图 47).

不計高級无穷小，四点 M_1, M_2, M_3, M_4 坐标各等于：

$$x_1=\varphi_1(u,v),\quad y_1=\psi_1(u,v),$$

$$\begin{cases}x_2=\varphi_1(u+\Delta u,v)=\varphi_1(u,v)+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u,\\[2mm] y_2=\psi_1(u+\Delta u,v)=\psi_1(u,v)+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=\varphi_1(u+\Delta u,v+\Delta v)=\varphi_1(u,v)+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v,\\[2mm] y_3=\psi_1(u+\Delta u,v+\Delta v)=\psi_1(u,v)+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v,\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}x_4=\varphi_1(u,v+\Delta v)=\varphi_1(u,v)+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v,\\[2mm] y_4=\varphi_1(u,v+\Delta v)=\psi_1(u,v)+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v.\end{cases}$$

由这些公式直接推出

$$x_2-x_1=x_3-x_4,\quad y_2-y_1=y_3-y_4.$$

即得 $M_1M_2M_3M_4$ 是一个平行四边形，这平行四边形的面积等于三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积的两倍；因此可知

$$\begin{aligned}d\sigma&=|x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+(x_2y_3-x_3y_2)|\\&=|(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3)|,\end{aligned}$$

代入坐标表达式可知，曲綫坐标的面积元素

$$d\sigma=\left|\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\right|du\,dv=|D|du\,dv$$

（請注意 D 的**絕对值**），因此得出二重积分的换元公式。

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}F(u,v)|D|du\,dv,$$

此处 $F(u,v)$ 是 (u,v) 的函数，由 $f(x,y)$ 經变换而得出的。

在变换 (1) 中，我們也可以把 u, v 看成为垂直坐标，这样便把 (x,y) 平面上的区域 (σ) 变为 (u,v) 平面上的区域 (σ')，而积分公式改变成为

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma')}F(u,v)|D|du\,dv.$$

由此也可以看出，当区域 (σ) 变为区域 (σ') 时，$|D|$ 是 (σ) 中的无穷小面积与 (σ')

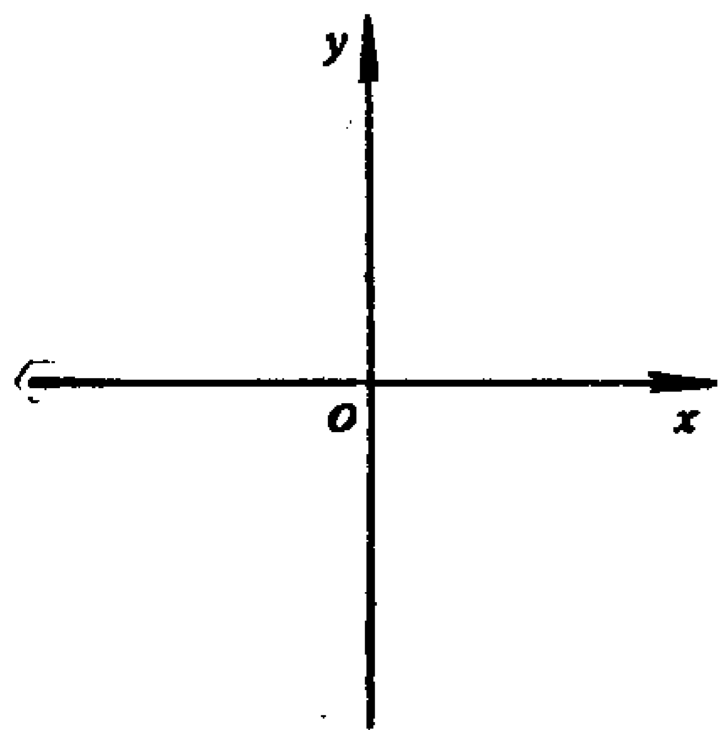


图 48

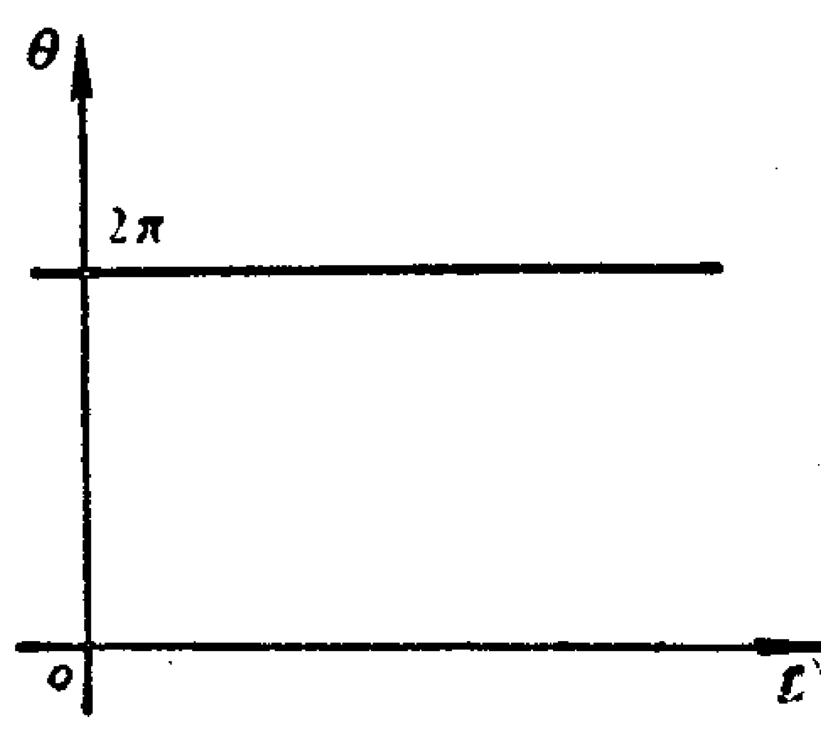


图 49

中对应的无穷小面积的比。

例 1. 以极坐标为例。

如果把 (r, θ) 看成为直角坐标，则由

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

得出一个由 (x, y) 平面到 (r, θ) 平面的变换，但一长条

$$0 < r < \infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

就变为 (x, y) 的原点除外的全平面，而且其間有一一对应的关系（图 48 及 49）。但对应于原点 $x = 0$, $y = 0$, 在 (θ, r) 平面上是一条綫段 $r = 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, 这变换的函数行列式等于

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} \\ \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

卽得前所証明的极坐标面积元素 $r dr\, d\theta$.

在 (x, y) 平面上的单位圓 $0 < x^2 + y^2 \leqslant 1$, 經极坐标变换后变为

$$0 < r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

在 (r, θ) 平面上是一长方形。

例 2. 再引进一变换

$$x + y = u, \quad y = vu, \quad [x = u(1 - v)].$$

如此則

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{x + y}.$$

函数行列式等于

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u.$$

現在考慮区域

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1.$$

經变换后的情况，卽得

$$u = x + y < 1, \quad u(1 - v) > 0, \quad uv > 0.$$

化簡得

$$1 > u > 0, \quad 1 > v > 0,$$

卽 (x, y) 平面上的三角形 $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$, 經变换后得到 (u, v) 平面上的正方形，而且是一一对应的。因而

$$\iint\limits_{\substack{x>0\\y>0\\x+y<1}} f(x, y)dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 F(u, v)u\, du\, dv.$$

例 3. 求界于半径为 a 的球与通过球心的半径为 $a/2$ 的正圓柱之間的体积（如图 50）。以球中心作为原点，球的方程是

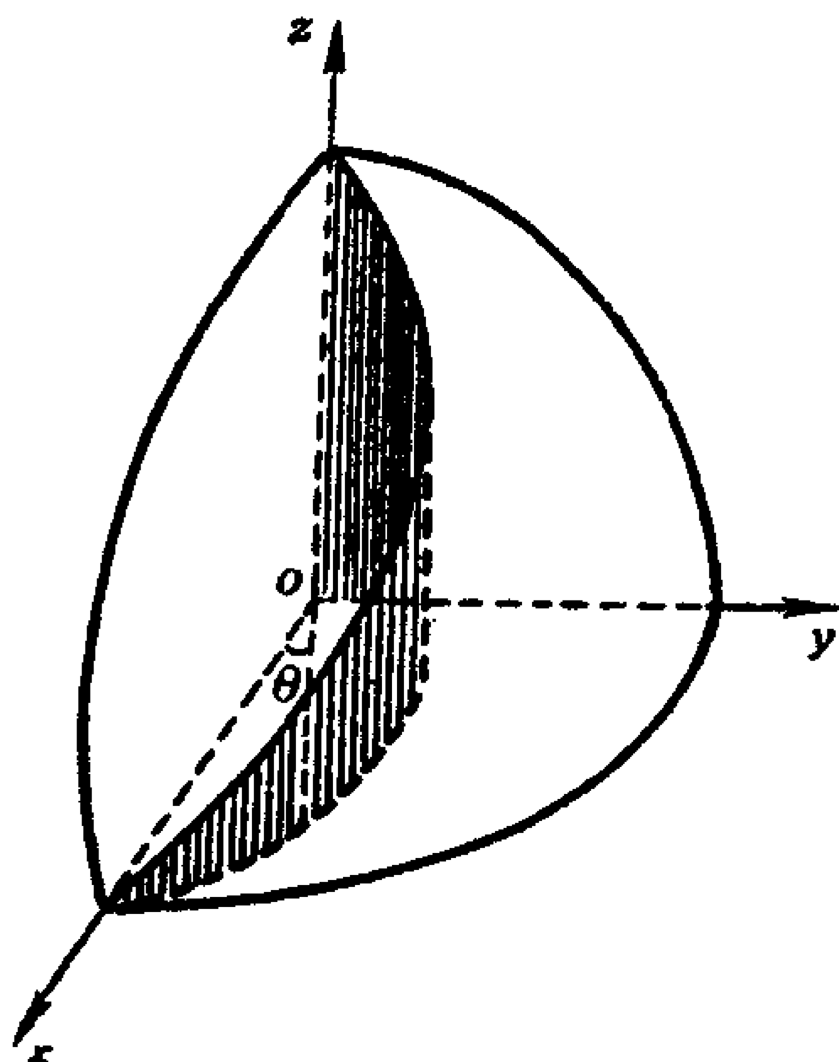


图 50

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

柱軸交 x 軸,卽經过 $x=\frac{a}{2}$,柱的方程是

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

卽

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

所求的体积显然是第一个卦限中的体积的四倍.

积分的区域是圓柱的半个底,它的界綫由半圓周

$$r=a\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

及 x 軸上的綫段所組成.

由 $z=\sqrt{a^2-r^2}$ 可知,所求的体积等于

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=a\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3-a^3\sin^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}a^3\left[\theta+\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

§4. 重积分的基本性質

1) 常数因子可由积分号下提出来,即

$$\iint\limits_{(\sigma)}af(P)d\sigma=a\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma.$$

2) 函数的代数和的积分等于各項积分的代数和,卽

$$\iint\limits_{(\sigma)}[f(P)+g(P)]d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma+\iint\limits_{(\sigma)}g(P)d\sigma.$$

这两性質合并后得出,对任二实数 a 与 b 常有綫性关系

$$\iint\limits_{(\sigma)}(af(P)+bg(P))d\sigma=a\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma+b\iint\limits_{(\sigma)}g(P)d\sigma.$$

3) 把区域 (σ) 分为有限多个部分区域,且它們沒有公共内点, 則过整个区域的积分等于过各区域的积分的和.

例如,把 (σ) 分为 (σ_1) 与 (σ_2), 且 (σ_1) 与 (σ_2) 沒有公共内点,則

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_1)}f(P)d\sigma+\iint\limits_{(\sigma_2)}f(P)d\sigma$$

(可加性).

4）如果在 (σ) 上，$f(P)\leqslant g(P)$，则

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma \leqslant \iint\limits_{(\sigma)} g(P)\,d\sigma.$$

特别是

$$\left|\iint\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma\right| \leqslant \iint\limits_{(\sigma)} |f(P)|\,d\sigma.$$

5）如果 $\varphi(P)$ 在 (σ) 上不变号，则有下面的中值公式，即在 (σ) 中有某一点 P_0，使

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(P)\varphi(P)\,d\sigma = f(P_0)\iint\limits_{(\sigma)} \varphi(P)\,d\sigma$$

（$f(P)$ 是連續函数）.

特别，当 $\varphi(P)=1$ 时有

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = f(P_0)\sigma,$$

此处 σ 是区域 (σ) 的面积.

多重积分的瑕积分（或称反常积分），我們不再詳細討論（仅于 § 8 中举列說明），我們仅請大家注意二点，1. 如果因为函数値而反常，则先作小域包有那些反常点，然后再看当域变小时的极限；2. 如果反常是由于域的无穷．则先作不反常的域，然后命不反常的域趋于該域.

例如：在求

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy$$

时，可以从

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N} f(x, y)\,dx\,dy$$

出发，但現在的可能性比一个变数的情况多得多了，因为我們还可以考虑

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\ N_2\to\infty\\ M_1\to\infty\\ M_2\to\infty}}\int_{-N_1}^{N_2}\int_{-M_1}^{M_2} f(x, y)\,dx\,dy \quad 及 \quad \lim_{N\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant N^2} f(x, y)\,dx\,dy$$

等等.

例 1. 考虑定积分

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}, \quad \alpha \neq 1,$$

此处 (σ) 是整个平面，先考虑积分

$$I(R) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}$$

换极坐标得

$$I(R) = \int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{r\,dr\,d\theta}{(1+r^2)^{\alpha}} = \frac{\pi}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(1+R^2)^{\alpha-1}} - 1\right)$$

若 $\alpha<1$，则当 $R\to\infty$ 时，右边无限上升，所以原积分发散：若 $\alpha>1$，则 $\lim\limits_{R\to\infty} I(R) = \dfrac{\pi}{\alpha-1}$，

所以証明这积分的收斂性.

例 2. 由于

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2=\iint\limits_{(\sigma)} e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho d\rho\,d\theta=-\pi e^{-\rho^2}\Big|_0^{\infty}=\pi,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

例 3. 考虑重积分

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}}\frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}}.$$

我們先求

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}\int_0^1 y\,dy=(1-\sqrt{\varepsilon}).$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时,得原积分的数值为 1.

§5. 三 重 积 分

抽象的三重(及多重)积分的定义与性质不难由与前相仿的方法获得.

以上所講的二重积分,固然可以理解为体积,但也可以理解为分布在平面区域 (σ) 上的質量. 如果区域 $\Delta\sigma$ 上的总質量等于 Δm,则当 $\Delta\sigma$ 趋于一点 P 时,

$$\lim_{\Delta\sigma\to P}\frac{\Delta m}{\Delta\sigma}=\rho(P)$$

存在, 那末,我們称 $\rho(P)$ 是 P 点的密度,(σ) 上全部質量可以写成为漸近式

$$m\sim\sum_{(\sigma)}\rho(P)\Delta\sigma.$$

当网眼无穷精密时,卽得这物質的总質量等于

$$\iint\limits_{(\sigma)}\rho(P)d\sigma.$$

我們可以用相似的方法来研究空間的質量問題.

命 $\rho(x, y, z)$ 是該物質分布的密度,则在域 (σ) 上的总質量等于

$$\iiint\limits_{(v)}\rho(x, y, z)dv,$$

它是

$$\sum_{(v)}\rho(x, y, z)\Delta v$$

的极限,当网眼无穷精密时的极限;这便是三重积分. 这样积分的計算可以分为三次一重积分算出(关于可求积分及可以由迭次积分求出的条件,一如以前所說过的).

在实际計算

$$\iiint\limits_{(v)}f(x, y, z)dv$$

时，我們用以下的步驟：首先把区域(v)的界面(s)投影在xy平面上，得区域(σ_{xy})，再通过(σ_{xy})上的一点作一平行于z軸的直綫，穿入与穿出区域(v)的縱坐标以z_1与z_2来表它．作单积分(把x, y看为常数)

$$F(x, y)=\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) d z.$$

这单积分对(σ_{xy})中的点定义，然后再求二重积分

$$\iint_{(\sigma_{xy})} F(x, y) d \sigma_{xy}.$$

这就是三重积分的数值．

以上的积分还可以化为迭次单积分，即得

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) d v=\int_a^b d x \int_{y_1}^{y_2} d y \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) d z.$$

这也可以写成为

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) d x\, d y\, d z$$

的形式，而$dx\,dy\,dz$也称为直角坐标的单位元素，也就是以dx, dy, dz为边长的无穷小长方体的体积．

注意．以上的討論是指平行于z軸的直綫与(v)的交点不多于2的情况，但是对一般的情况的研究，并无特殊困难，只須分割成块，逐一求积分，再求总和即得．

用同样的方法，我們可以得出换变数的公式

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) d x\, d y\, d z=\iiint_{(v)} F(u, v, w)\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| d u\, d v\, d w,$$

此处$F(u, v, w)$是經变换由$f(x, y, z)$变出来的，而$\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$是該变换的函数行列式．

在换变数的时候，我們必須注意，$\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$在积分区域内是不变号的．

特别有

1）柱坐标

$$x=r \cos \theta, \quad y=r \sin \theta, \quad z=z$$

的变换的函数行列式等于

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}=r.$$

从而有

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) d v=\iiint_{(v)} F(r, \theta, z) r d r\, d \theta\, d z,$$

这儿$F(r, \theta, z)$是r, θ, z的函数，它是由$f(x, y, z)$經坐标变换而得到的．

2）球坐标

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta.$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi, & \sin\theta\sin\varphi, & \cos\theta\\ \rho\cos\theta\cos\varphi, & \rho\cos\theta\sin\varphi, & -\rho\sin\theta\\ -\rho\sin\theta\sin\varphi, & \rho\sin\theta\cos\varphi, & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\theta,$$

所以有球坐标的积分公式

$$\iiint\limits_{(v)} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{(v)} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi,$$

这儿 $F(\rho,\theta,\varphi)$是 ρ,θ,φ 的函数,它是由 $f(x,y,z)$經坐标变換而得到的.

例 1. 求充滿有不均匀物質的球段的質量,其密度正比于到这球段的底的距离(如图 51).

以球心作为原点,用 a 記球的半径,h 記球段的高,r_0 記球段的底半径.

在柱坐标系中球面的方程是

$$r^2+z^2=a^2.$$

密度的改变率由下面公式来表达:

$$f(r,\varphi,z)=b+cz,$$

其中 b 与 c 是已知的常数.

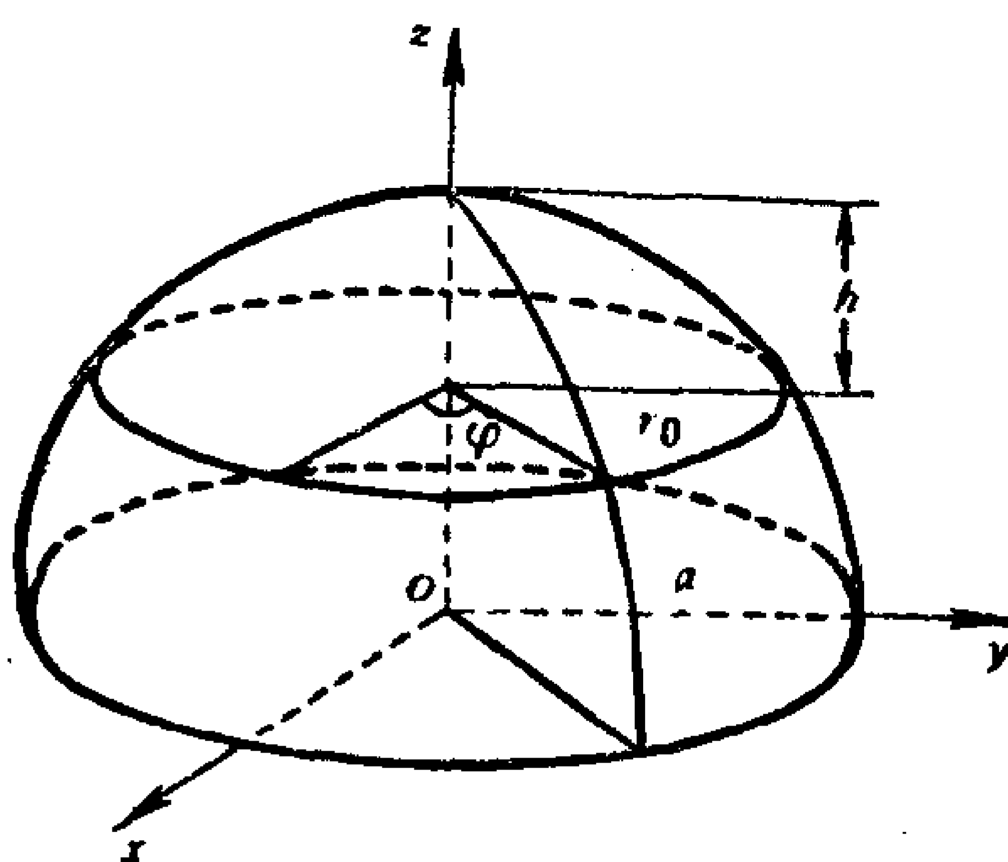


图 51

应用 1) 的公式得到

$$m=\iiint\limits_{(v)}(b+cz)r\,dr\,d\varphi\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_0}r\,dr\int_{a-h}^{\sqrt{a^2-r^2}}(b+cz)dz$$

$$=2\pi\int_0^{r_0}\left[bz+\frac{c}{2}z^2\right]_{z=a-h}^{z=\sqrt{a^2-r^2}}r\,dr.$$

代入 z 的值再求积分,就得到

$$m=bv+c\pi\frac{r_0^4}{4},$$

其中 v 是这球段的容积.

例 2. 求一个密度不均匀的球的質量,設在同心球层上密度相同. 在这情形下,依照条件,可以算作密度只依賴于 ρ 而由函数 $f(\rho)$ 来表达,这就給出

$$m=\iiint\limits_{(V)} f(\rho)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^a f(\rho)\rho^2d\rho$$

$$=4\pi\int_0^a f(\rho)\rho^2\,d\rho.$$

若密度是常数而等于 1,就得到球的容积的表达式

$$V=4\pi\int_0^a\rho^2d\rho=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

例 3. 設有界于坐标平面与平面 $x+y+z=a$ 之間的四面体 (V),它由下列的不等式来确定:

$$x > 0;\quad y > 0;\quad z > 0;\quad x + y + z < a.$$

引用新的变量

$$x + y + z = q_1;\quad a(y + z) = q_1q_2;\quad a^2z = q_1q_2q_3.$$

我們把 (q_1, q_2, q_3) 解释作为直角坐标. 由上面的公式推知:

$$q_1 = x + y + z;\quad q_2 = \frac{a(y + z)}{x + y + z};\quad q_3 = \frac{az}{y + z}$$

或

$$x = \frac{q_1(a - q_2)}{a};\quad y = \frac{q_1q_2(a - q_3)}{a^2};\quad z = \frac{q_1q_2q_3}{a^2}.$$

与 § 3 中完全一样, 四面体 (V) 变换为立方体 (V_1): $0 < q_1 < a$; $0<q_2 < a$; $0<q_3<a$. 这里不难算出 $D = \frac{1}{a^3} q_1^2q_2$, 于是变换公式就是

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(V_1)} F(q_1, q_2, q_3) \frac{1}{a^3} q_1^2q_2\, dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

这儿 $F(q_1 q_2 q_3)$ 是由 $f(x, y, z)$經上述的坐标变换而得到的; 或者,如果确定出积分限的話,

$$\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} f(x, y, z)dz = \frac{1}{a^3} \int_0^a q_1^2dq_1 \int_0^a q_2dq_2 \int_0^a F(q_1, q_2, q_3)dq_3.$$

§ 6. 矩

現在考虑有几个質点

$$M_1, M_2, \cdots, M_n$$

的質点系,它們的質量各等于 $m_1, m_2, \cdots, m_n$,系中每質点到平面 (Δ),或綫 (l) 或点 (P) 的距离的 k 次方冪与該点的質量的乘积之和

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^k m_i,$$

称为这个質点系对 (Δ), 对 (l) 或对点 (P) 的 k 級矩.

零級矩就是这个系統的总質量

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

一級矩就是这个系对 (Δ), 对 (l) 或对 (P) 的靜力矩,而

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_ix_i}{m},\quad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_iy_i}{m},\quad \bar{z} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_iz_i}{m},$$

称为这个系的重心. 二級矩则称为慣性矩. 例如,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2m_i,\quad \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2)m_i,\quad \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)m_i$$

分别表示对 yz 平面, x 軸及原点的慣性矩,而

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i m_i$$

表示对 x 軸的离心矩.

如果考慮的不是有限多个点系，而是連續分布的质点，那末依照质点是按直綫，平面或空間的分布，分别将上面的和換为单重，二重或三重积分． 而以点 M 的密度 $f(M)$ 乘以单位长度，单位面积或单位体积来代替因子 m_i.

例如，三維空間区間 (v) 关于原点的慣性矩为

$$\iiint_{(v)} (x^2 + y^2 + z^2) f(M) dv.$$

例 1. 求均匀球底錐的重心，如图 52 所示，重心落在軸上，这时只須求

$$z_g = \frac{\iiint_{(V)} z dv}{V}.$$

这里我們有

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi a^3 (1 - \cos\alpha),$$

$$\iiint_{(V)} z \, dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta \int_0^a \rho\cos\theta\rho^2 \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{8} a^4 (1 - \cos 2\alpha),$$

$$z_g = \frac{3}{16} a \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{3}{8} a (1 + \cos\alpha) = \frac{3}{8}(2a - h),$$

其中 a 是球半径.

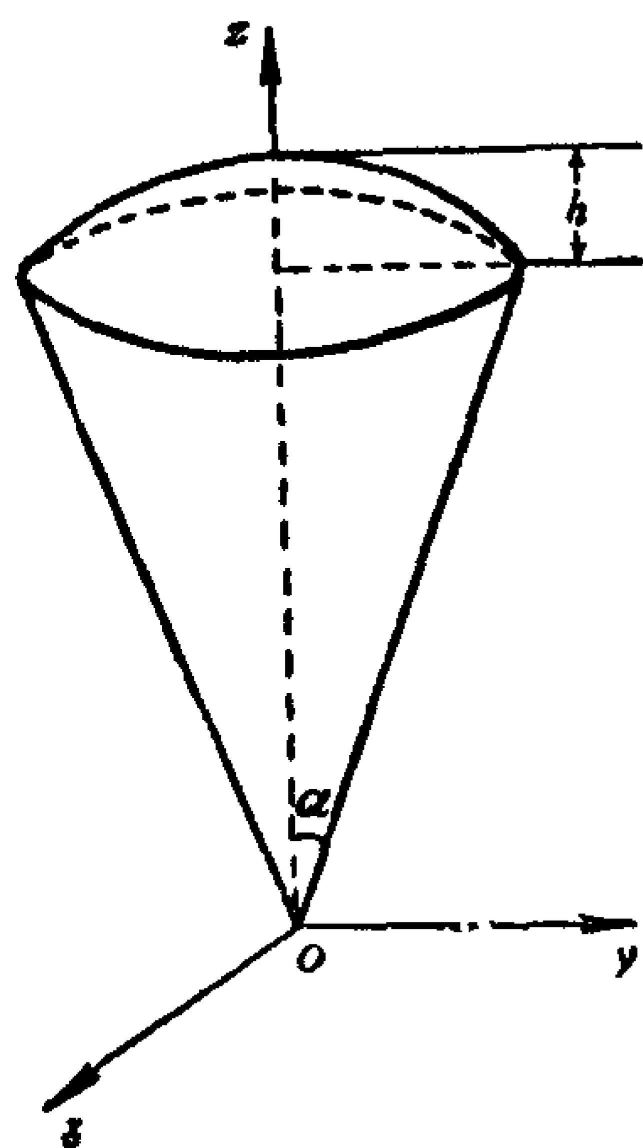


图 52

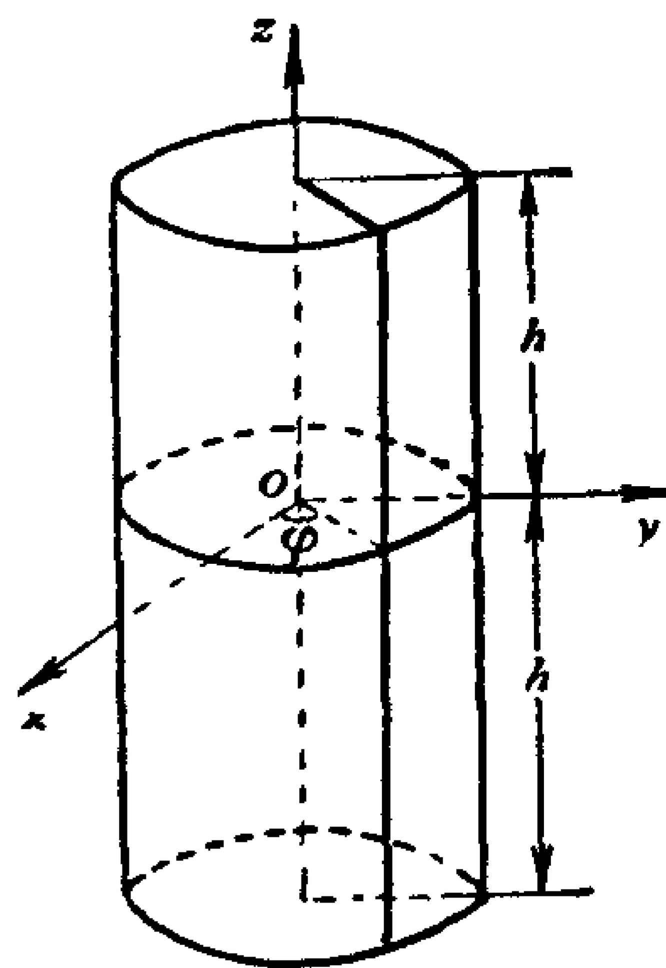


图 53

例 2. 若重心与坐标原点重合，則所有的静力矩等于零，这可以由下列关系式直接推出来：

$$\iiint_{(V)} xf \, dV = mx_g, \quad \iiint_{(V)} yf \, dV = my_g, \quad \iiint_{(V)} zf \, dV = mz_g.$$

例 3. 求均匀正圓柱体(如图 53)对于圓柱的軸以及它的正中断面的直径的慣性矩。密度算作是常量且等于 f_0，我們有

$$J_z = f_0 \iiint\limits_{(V)} r^3\,dr\,d\varphi\,dz = 2f_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3\,dr \int_0^h dz = \pi a^4 h f_0 = m\frac{a^2}{2}.$$

$$J_x = f_0 \iiint\limits_{(V)} (z^2 + r^2\sin^2\varphi) r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= 2f_0 \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (z^2 + r^2\sin^2\varphi) r\,dr$$

$$= 2f_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z^2\,dz \int_0^a r\,dr + 2f_0 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi \int_0^h dz \int_0^a r^3\,dr$$

$$= \frac{2}{3}\pi h^3 a^2 f_0 + \frac{\pi}{2} h a^4 f_0 = m\left(\frac{h^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right).$$

其中 $2h$ 是柱体的高，a 是它的底半径，m 是它的質量。

例 4. 求均匀橢球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的慣性矩。

$$J_{xy} = f_0 \iiint\limits_{(V)} z^2\,dx\,dy\,dz = f_0 \int_{-c}^{+c} z^2 \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz$$

$$= 2\pi ab f_0\left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^3}{5}\right) = m\,\frac{1}{5}\,c^2,$$

此处 m 为橢球体的質量。置换字母，不难求出：

$$J_{yz} = m\cdot\frac{1}{5}a^2; \quad J_{zx} = m\cdot\frac{1}{5}b^2,$$

$$J_x = J_{xy} + J_{xz} = m\frac{1}{5}(b^2 + c^2),$$

$$J_y = \frac{m}{5}(c^2 + a^2); \quad J_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2),$$

$$J_0 = J_{xy} + J_{yz} + J_{zx} = \frac{m}{5}(a^2 + b^2 + c^2).$$

例 5. 求刚体繞 (δ) 軸轉动时的动能。

我們知道，当物体以角速度 ω 繞 (δ) 轉动时，物体每一点速度 $V = \omega r_\delta$ (r_δ 为这点到轉动軸的距离)，把物体分成質量单元 Δm. 以 ΔT 表对应于該单元的动能，于是就有

$$T = \Sigma\Delta T.$$

由于 Δm 的微小性，可以看成它的全部質量集中于它的任何一点 M，这时单元 Δm 的动能 ΔT 就等于

$$\Delta T = \frac{1}{2}V^2\Delta m = \frac{1}{2}\omega^2 r_\delta^2 f(M)\Delta V.$$

因此

$$T = \iiint\limits_{(V)} \frac{1}{2}\omega^2 r_\delta^2 f(M)dV = \frac{1}{2}\omega^2 J_\delta,$$

其中

$$J_\delta=\iiint\limits_{(V)} r_\delta^2 f(M)dV$$

是物体对于轉动軸 (δ) 的慣性矩.

§7. 曲面的面积

我們假定曲面 S 的方程是

$$z=f(x,y),$$

且命

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

曲面 (S) 在 xy 平面上的射影是区域 (σ). 我們把区域进行分割,命 $\Delta\sigma$ 是其上的一小块,并且假定它是 S 上的一小块 ΔS 的投影. 我們研究 $\Delta\sigma$ 与 ΔS 的关系. 在 $\Delta\sigma$ 中取一点 (x, y), 在 S 上有一点 $(x, y, f(x, y))$, 在这点的切平面是

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}=Z-z.$$

这切平面与 x, y 平面的夹角命之为 r, 则

$$\cos r=\frac{1}{\mp\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

命 $\Delta S'$ 是切平面上的一块,它的投影是 $\Delta\sigma$, 所以

$$\Delta\sigma=\Delta S'\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

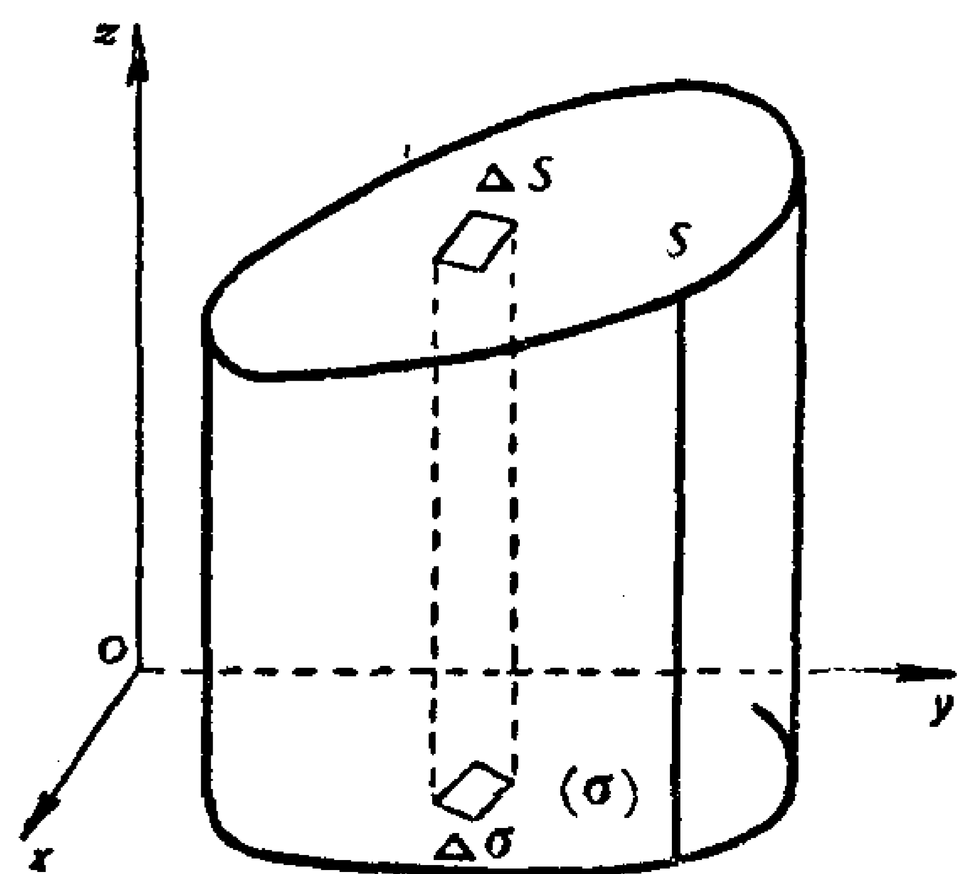


图 54

如果我們定义 S 的面积为这样的 $\Delta S'$ 的和的极限,则

$$S=\lim\sum\Delta S'=\lim\sum_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma.$$

因而得出

$$S=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

积分号下表达式称为曲面 S 的面积元素,以

$$dS=\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma_{xy}$$

表它.

在这些公式里,我們假定 p 与 q 是 x, y 的連續函数.

这公式的缺点在于:定义是与 xy 平面有关的,换言之,如果另选一組坐标,这数值变否?

又如果通过 σ_{xy} 的一点平行于 z 軸的直綫,交曲面于一点以上,可以把曲面切开来算.

例 1. 計算半径为 a, 中心在原点的球面,在第一卦限中,被圓柱

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

截取的部分的面积(图 55). 由球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

有

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

$$p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z}; \quad q = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z};$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} = \frac{a}{z};$$

$$S = \iint_{(\sigma)} \frac{a}{z} r\, dr\, d\varphi = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sqrt{a^2 - r^2})\Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi} d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi) d\varphi = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

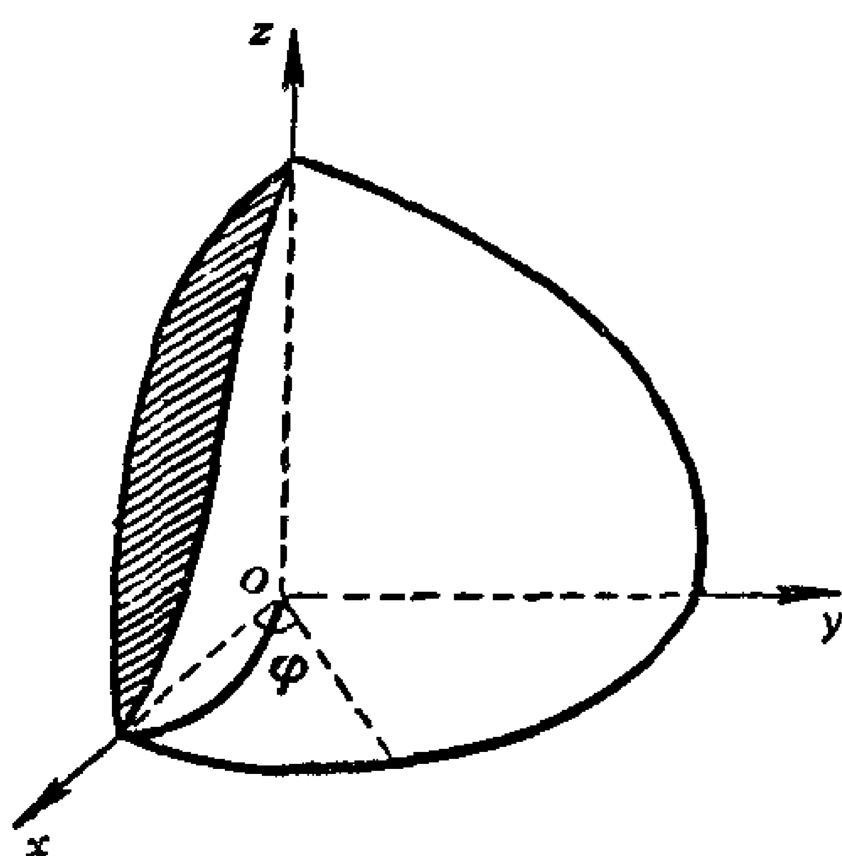


图 55

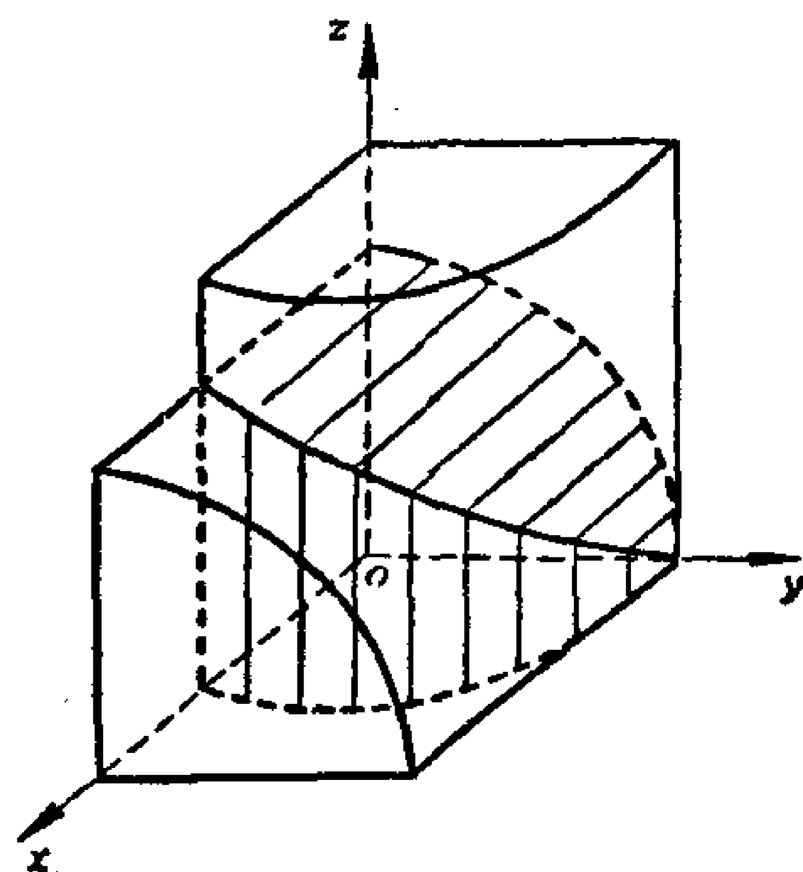


图 56

例 2. 求柱面

$$x^2 + y^2 = a^2$$

被柱面

$$y^2 + z^2 = a^2$$

截下的一部分的面积(如图 56).

本题以 y 与 z 作为自变数比较方便. 图上画出的面积等于所考虑的全部面积的 $\frac{1}{8}$, 所以就有

$$S = 8\iint_{(\sigma)} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dy\, dz,$$

其中

$$p = \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}; \quad q = \frac{\partial x}{\partial z} = 0;$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

于是

$$S = 8a\int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 8a\int_0^a \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a} dz$$

$$= 8a\left[z\arcsin \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a}\Big|_{z=0}^{z=a} + \int_0^a \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz\right]$$

$$= -8a\sqrt{a^2-z^2}\Big|_{z=0}^{z=a} = 8a^2.$$

我們現在研究由参变数表出的曲面的面积公式. 假定

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v).$$

如此則

$$p=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

換变数后

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$$

$$\times\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv.$$

由于

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial y}{\partial u}\\ -\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\end{pmatrix}\Bigg/\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,$$

可知

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,\qquad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial u}{\partial y}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,\quad \frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|.$$

因此

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$

$$+\left(-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$$

$$=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]$$

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

命

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

則曲面积的公式变为

$$\iint_{s}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

所可注意者，$EG-F^2$ 是微分二次型

$$dx^2+dy^2+dz^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)^2$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

的判別式。

§8. 物質对一点的引力

假定該点为 $c(x, y, z)$，它的質量等于1，物質为 v，我們現在考虑这一物質 v 对 c 点的引力。

把物質 v 分为小块，命 Δm 为其中一块的質量，在这一块中任取一点 $M(\xi, \eta, \zeta)$，命 r 代表 c 与 M 的距离，即

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

假定这一块的質量集中 M 点，則这一块与点 c 的引力大小等于

$$\frac{\Delta m}{r^2}$$

（我們假定引力常数等于1），这力成一矢量，它在 x, y, z 三軸上的投影等于

$$\frac{\Delta m}{r^2}\frac{\xi-x}{r},\quad \frac{\Delta m}{r^2}\frac{\eta-y}{r},\quad \frac{\Delta m}{r^2}\frac{\zeta-z}{r}.$$

所以全部引力的三軸投影的近似式是

$$X\sim\Sigma\frac{\xi-x}{r^3}\Delta m,\quad Y\sim\Sigma\frac{\eta-y}{r^3}\Delta m,\quad Z\sim\Sigma\frac{\zeta-z}{r^3}\Delta m.$$

命 $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ 表物質在 M 点的密度，所以 $\Delta m\sim\mu\Delta v$，当分法无限精密时，得极限

$$X=\iiint_v \mu\frac{\xi-x}{r^3}dv,\quad Y=\iiint_v \mu\frac{\eta-y}{r^3}dv,\quad Z=\iiint_v \mu\frac{\zeta-z}{r^3}dv. \qquad (1)$$

积分中 $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ 过物質所占有的地位 v，而 X, Y, Z 是 x, y, z 的函数。

这三个积分是重瑕积分的例子，当然，如果 (x, y, z) 在 v 外，它們并不是瑕积分，但当 (x, y, z) 在 v 中，被积函数有时变为∞，因而是瑕积分了。当然从物理性質我們知道这瑕积分是存在的，实質上，我們也可用数学严格証明如次：假定 μ_0 是函数 $\mu(x, y, z)$ 在 v 上的上界，如此

$$\left|\mu\frac{\xi-x}{r^3}\right|\leqslant\mu_0\frac{1}{r^2}.$$

我們考虑

$$\iiint_{(v)}\frac{1}{r^2}dv=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\substack{(v)\\(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2>\varepsilon^2}}\frac{dv}{r^2},$$

用以 (x, y, z) 为中心的球坐标：

$$\xi = x + \rho \sin\theta\cos\varphi,\quad \eta = y + \rho\sin\theta\sin\varphi,\quad \zeta = z + \rho\cos\theta,$$

则得

$$\iiint\limits_{\substack{(v)\\(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2>\varepsilon^2}} \frac{dv}{r^2} = \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_\varepsilon^{f(\theta,\varphi)} \sin\theta\, d\rho,$$

这儿 $r = f(\theta, \varphi)$ 是物質 v 的表面的球坐标方程. 当 $\varepsilon \to 0$ 时极限显然存在，也就是表达 X, Y, Z 的瑕积分都是存在的.

由于

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-\eta}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-\zeta}{r},$$

及

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x-\xi}{r}\right) = \frac{\xi - x}{r^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\eta - y}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\zeta - z}{r^3},$$

所以关于 X, Y, Z 的积分可以改写成为

$$X = \iiint\limits_{(v)} \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

$$Y = \iiint\limits_{(v)} \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

$$Z = \iiint\limits_{(v)} \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dv. \tag{2}$$

引进物質在 c 点的势量的积分

$$U = \iiint\limits_{(v)} \frac{\mu dv}{r} \tag{3}$$

如果允許积分号下求微分可以立即得

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4}$$

可以証明，当 $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ 連續时，在整个空間积分 X, Y, Z 是 (x, y, z) 的連續函数，U 是連續函数而且有一級偏微商，并可由 (4) 表出来.

如果允許我們再一次积分号下求微商，則得

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \iiint\limits_{(v)} \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \iiint\limits_{(v)} \mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \iiint\limits_{(v)} \mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) dv. \tag{5}$$

这些公式仅当点 $c(x, y, z)$ 在吸引物質之外时正确，就是在 (v) 之外时正确. 如果 c 在 (v) 内，則由于

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 的积分表达式不再收斂，即势量 U 的二級微商不能在积分号下求微商两次得之。

由于

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]}{r^5}-\frac{3}{r^3}=0,$$

所以当 c 在 (v) 之外，U 适合于

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{6}$$

这方程称为 Laplace 方程。所以，占有容积的物质的势量，在出现于这物質之外的点 $c(x, y, z)$ 满足 Laplace 方程。

我們再研究点 $c(x, y, z)$ 在 v 內的情况。

取一密度均匀（μ 是常数）及半徑为 a 球心在原点的球，取 oc 为 z 軸，取球坐标 (ρ, θ, φ) 得

$$U=\mu\iiint_{(v)}\frac{dv}{r}=\mu\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{\rho^2\sin\theta}{r}\,d\varphi\,d\theta\,d\rho, \tag{7}$$

此处显然有

$$r^2=\rho^2+z^2-2\rho z\cos\theta.$$

先求对 θ 的积分

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{r}.$$

在这积分中把 ρ 与 φ 視为常数，把变量 r 代替 θ，則得

$$r\,dr=\rho z\sin\theta\,d\theta,\quad \frac{\sin\theta\,d\theta}{r}=\frac{dr}{\rho z}.$$

分两种情况来定出积分的区域。若 $z>\rho$，則当 θ 由 0 变到 π 时，r 由 $z-\rho$ 变到 $z+\rho$；若 $z<\rho$，則 r 由 $\rho-z$ 变到 $\rho+z$。所以

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{r}=\begin{cases}\displaystyle\int_{z-\rho}^{z+\rho}\frac{dr}{\rho z}=\frac{2}{z}\ (z>\rho),\\[2ex] \displaystyle\int_{\rho-z}^{\rho+z}\frac{dr}{\rho z}=\frac{2}{\rho}\ (z<\rho).\end{cases}$$

代入 (7) 中，而分两种情形来討論。

首先是 c 在球外或球表面上，这是 $a\leqslant z$，于是所有的区間 $(0, a)$ 上 ρ 的值 $\leqslant z$，所以有

$$U=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a}\frac{2\rho^2\,d\rho}{z}=\frac{4\pi a^3\mu}{3z}=\frac{m}{z}, \tag{8}$$

其中 m 是球的全部質量。

再討論 c 在球內的情况：把这区間 $(0, a)$ 分为两份：$(0, z)$ 与 (z, a)，于是得

$$U=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\int_0^z\frac{2\rho^2\,d\rho}{z}+\int_z^a\frac{2\rho^2\,d\rho}{\rho}\right]=2\pi\mu\left(a^2-\frac{1}{3}z^2\right), \tag{9}$$

当 $z=a$ 时,即 c 在球表面上时,两公式所給的数值相等,所以 U 是連續函数.

再来計算引力,这引力是沿 z 軸方向的,所以仅需計算

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

当 c 在球外,则

$$Z=-\frac{m}{z^2}, \tag{10}$$

而 c 在球内时,则

$$Z=-\frac{4}{3}\pi\mu z. \tag{11}$$

当 $z=a$ 时, (10) 与 (11) 是一致的,所以引力 Z 有連續性.

公式 (8), (10), (11) 說明:均匀球对外一点的势量与引力可以由集中球的全部质量于球心得来,对于球内一点的引力与被引点到球心的距离成比例.

以上是为了計算簡单起見,而取了特殊的坐标軸,即 z 軸就是 oc 的方向,在以上的公式中, z 是点 c 与球心的距离. 在以 o 为原点的任一坐标系中,以 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 代表 z, 如此

$$U=\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ (c\ 在球外),$$

$$U=2\pi\mu\left[a^2-\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\right]\ (c\ 在球内).$$

前者适合 Laplace 方程是显而易見的,而后者适合于

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-4\pi\mu\ (c\ 在球内).$$

将来我們将看到,对任何密度的容积,如果 c 在 (v) 内, 則适合此方程.

再者,假定吸引的物在一曲面 S 上,具有密度 $\mu(M)$, 像上面一样,用 $c(x, y, z)$ 表被吸引的质量为 1 的质点, r 表 cM 的距离,我們有势量

$$U=\iint_{(S)}\frac{\mu(M)}{r}\,dS$$

及引力的投影:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\iint_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dS,$$

$$Y=\frac{\partial U}{\partial y}=\iint_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)dS,$$

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}=\iint_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dS.$$

这样的势量称为单层势量. 因这例中 c 取在曲面 S 之外,所以所有的积分都是正常的.

补　　充

§9. 求　面　积

我們可以借助于求积仪以求面积. 如果不用求积仪，我們介紹以下两个簡而易行的方法.

1. 平行綫法

作一批等距离的平行綫，假定距离是 d. 这一批平行綫被图形所截取的长度是 l_1, l_2, $\cdots$. 这些长度的总和乘以 d 就可以用来作为这图形的面积. 在这里一条的面积是用 $\frac{1}{2}(l_1 + l_2)d$ 来計算的. 这实际上就是梯形公式的应用.

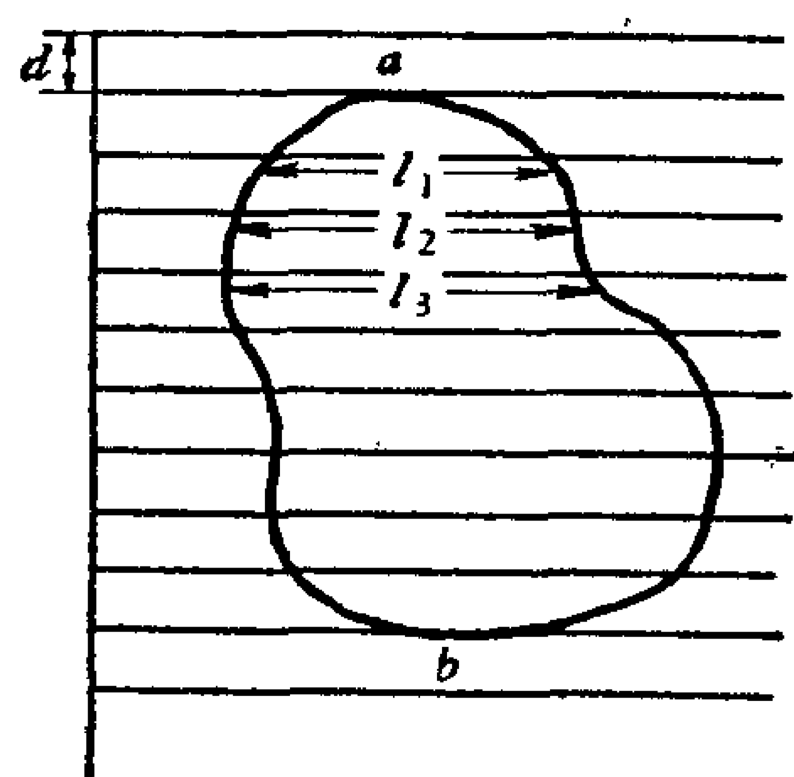


图 57

当然还可以用 $\frac{1}{3}(l_1 + 4l_2 + l_3)d$ 来代表两条的面积. 这对应于 Simpson 公式.

如果預先具备一张印有等距离 d 的平行綫的透明紙，那就更方便了,将透明紙蒙在图紙上,使透明紙的某两条綫切于欲求面积的图形的边界. 例如图 57 中切于 a 点与 b 点,我們就可以在透明紙的上面,用尺或曲綫仪等来量这一批平行綫被图形截取的綫段的长度了.

为了減少誤差,把平行綫法按几种不同的方向,算出結果,再把这些結果求平均值,这样就能得到較为可靠的結果.

当面积不大,而边界又相当复杂时,用这一方法是不够好的.

这一方法可以用来求图形的重心. 作平行于 oy 軸的一批等距离 d 的直綫,这些直綫将图形截成 n 条(图 58). 用上面的方法求出每一条的面积,設它們的面积依次为 s_1, s_2, $\cdots$, s_n. 設 s_i 所在的条带的中綫至 oy 軸的距离为 x_i, 則图形的重心至 oy 軸的距离等于

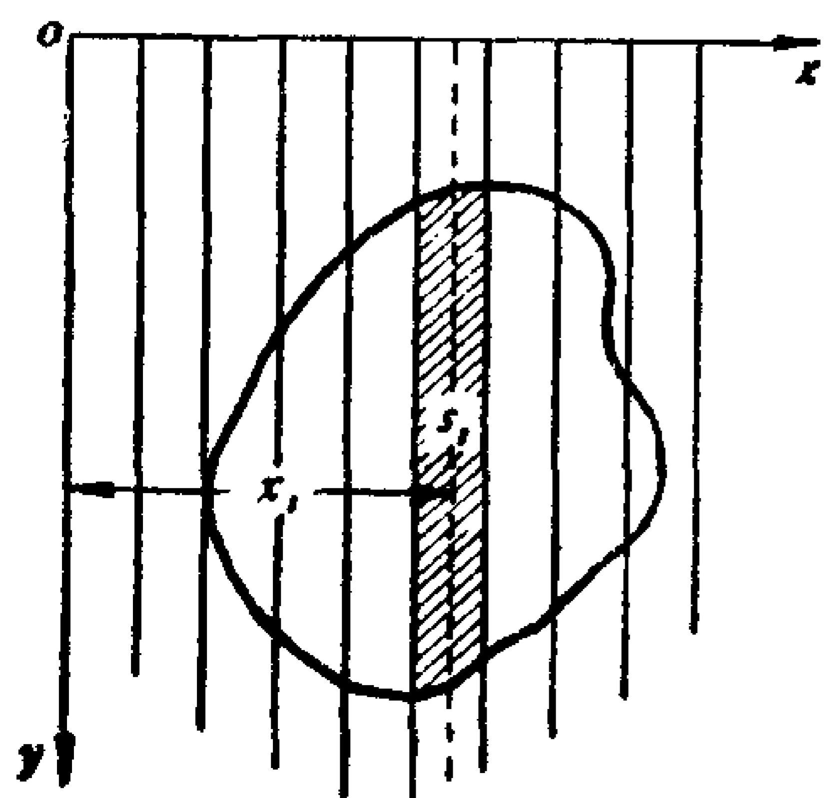


图 58

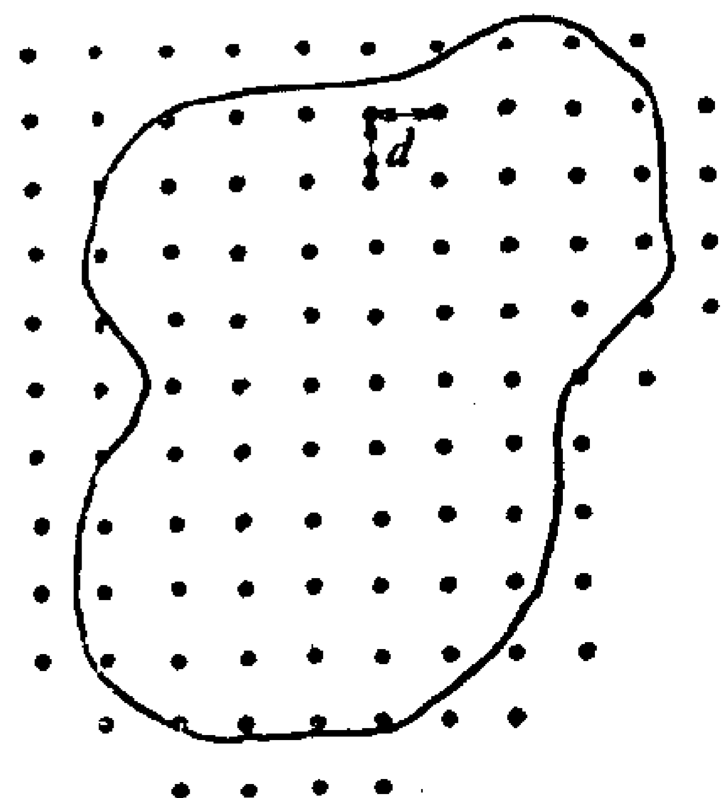


图 59

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}.$$

同法可以求出图形的重心至 ox 軸的距离 y_0.

2. 方格法

打以边长为 d 的方格,格子点落在图形内的个数乘以 d^2,就可以用来作为面积的近似值(图 59). 我們当然也可以在图形上按等距离摆上一批棋子, 然后計算一下棋子数,便可以得出面积.

如果預先具备一张印有边长为 d 的正方形角点的透明紙,就更加方便了,将透明紙蒙在图形上,然后数一下落在图中的点数卽可.

为了減少誤差,可以按不同的方向,計算几次,然后取其算术平均.

这个方法虽然簡单,但其精确度往往是比較高的, 所以用得也頗广泛, 用这个方法算出的面积的誤差,与图形的周界有关,在平面上引入直角坐标,我們有次之定理.

定理 1 (M. V. Jarnik). 命 l 表示一可求长的簡单的閉曲綫的长度,而以 A 表示曲綫所围成的区域的面积,N 为曲綫內部所含的整点的个数,则当 $l \geqslant 1$ 时

$$|A - N| < l.$$

所謂整点是指坐标为整数的点.

在証明之前,先証下面两个引理.

引理 1. 在边长为 1 的正方形中,任作一連續曲线 C,C 的两个端点在正方形的周界上,若 C 与正方形的两对角綫相交,则曲綫 C 的长度 l 必不小于 1.

証. 若 C 的两个端点在正方形的一对对边上, 则显然 $l \geqslant 1$. 若 C 的端点在正方形的二邻边上,如图 60, 易見

$$l \geqslant \overline{ap_1} + \overline{p_1q_1} + \overline{q_1c} \geqslant$$
$$\geqslant \overline{\alpha a} + \overline{ab} + \overline{b\beta} = \overline{\alpha\beta} = 1.$$

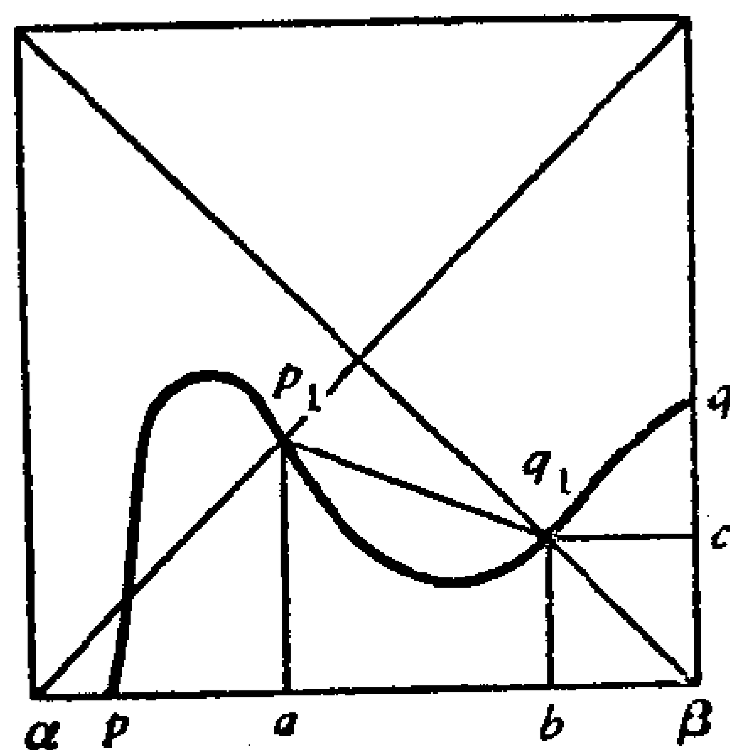


图 60

至于 C 的两个端点在同一个边上的情形, 可以用同法証之. 引理証完.

引理 2. 在边长为 1 的正方形中,任作一不通过正方形中心的連續曲綫 C,C 的两端

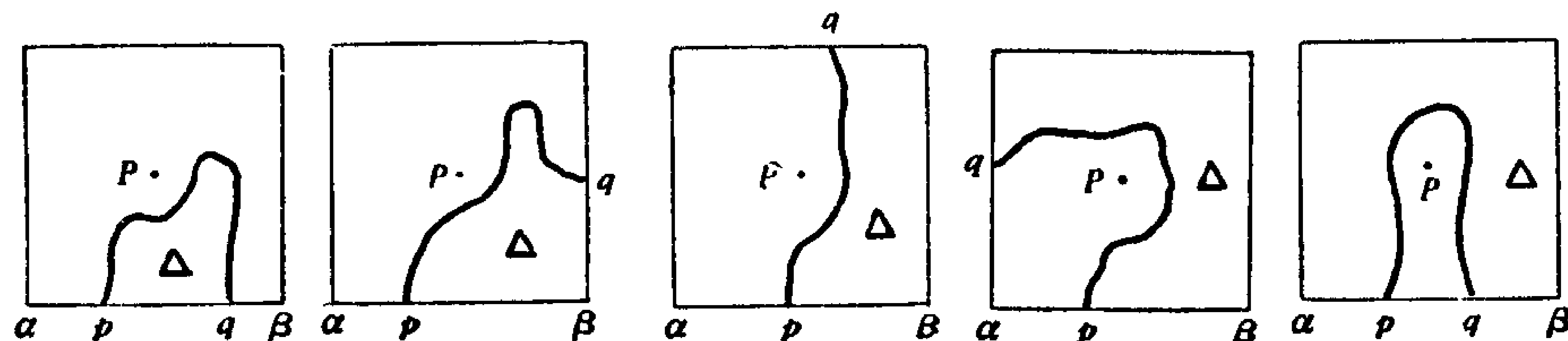


图 61

点在正方形的周界上. 曲綫C将正方形分为两部分,命Δ为其中不包含正方形中心的一部分,则Δ的面积必小于C的长度.

証. 今分别考虑以下各种情形(如图61).

命p, q表示曲綫C的端点,P为正方形的中心,A, l各表Δ的面积及曲綫C的长度,则在前两种情形中,从C上任何一点到直綫$\alpha\beta$的距离必不能大于l,故Δ完全落在一个边长为1与l的矩形中,因此$A < l$. 在后三种情形中,由引1可知$l \geqslant 1$,所以有$A < 1 \leqslant l$. 故得引理.

定理1的証明. 以I表示曲綫所围成的区域. 在平面上作网,以直綫

$$x = m + \frac{1}{2}, \quad y = n + \frac{1}{2} \, (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

为經緯,则网眼是边长为1的正方形; 又各正方形的中心就是整点. 以$Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$表示所有这些小正方形之含有I的一部分周界者,而以C_i表示有长曲綫之在Q_i中的部分,以Ω_i表示Q_i与I的共通部分,而定义

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } \Omega_i \text{ 中有整点}, \\ 0, & \text{若 } \Omega_i \text{ 中无整点}. \end{cases}$$

又以A_i表示Ω_i的面积,l_i表示C_i的长度,于是若能証明

$$|A_i - N_i| < l_i,$$

便得定理.

首先我們考虑整个I都在某一Q中的情形,因为$l \geqslant 1$,故易見定理成立. 因此我們可以不失普遍性地假定I并不整个地处在某一Q中,此时C_i为若干段曲綫之和,而这些曲綫段又将Q_i分为若干个部分$D_i^{(j)}$.

若整点不在任何$D_i^{(j)}$中,亦即当整点在C_i上时,有$N_i = 0$, $0 < A_i < 1$,此时C_i过正方形的中心. 由引理1有$l_i \geqslant 1$. 故得定理.

若整点在某一$D_i^{(j)}$中,以$A_i^{(j)}$表示$D_i^{(j)}$的面积,若$D_i^{(j)}$不在I中,此时$N_i = 0$, $A_i \leqslant 1 - A_i^{(j)}$; 若$D_i^{(j)}$在$I$中,则$N_i = 1$,而$1 - A_i \leqslant 1 - A_i^{(j)}$,而面积$(1 - A_i^{(j)})$所对应的区域不含正方形的中心,故由引2即得

$$1 - A_i^{(j)} < l_i,$$

于是得到定理.

§10. 求 容 积

我們常常会碰到計算容积的問題,例如求水庫容积,估算矿藏儲量等等,以下介紹一些常用的方法.

1. 簡易方法

这一段我們介紹一些不借助于等高綫图来估計容积的方法,例如計算某一水庫的容

积. 我們一共测得水庫 N 个点的深度 $h_1, h_2, \cdots, h_N$, 又測出水庫的水平面的面积 B. 則它的容积 V 可以用 B 乘以平均高度来計算，即

$$V = B\frac{\sum_{i=1}^{N} h_i}{N}. \tag{1}$$

有时公式(1)需要作适当的修正，例如我們一共测得了 N 个点的深度，其中有 K 个点位于水庫边上，那末就用

$$V = B\frac{\sum h - \frac{1}{2}\sum h_k}{(N-K)+\frac{1}{2}K} = B\frac{2\sum h - \sum h_k}{2N-K} \tag{2}$$

来計算容积，此处 $\sum h$ 为全部 N 个点的深度之和，$\sum h_k$ 为沿着水庫边上各点的深度之和.

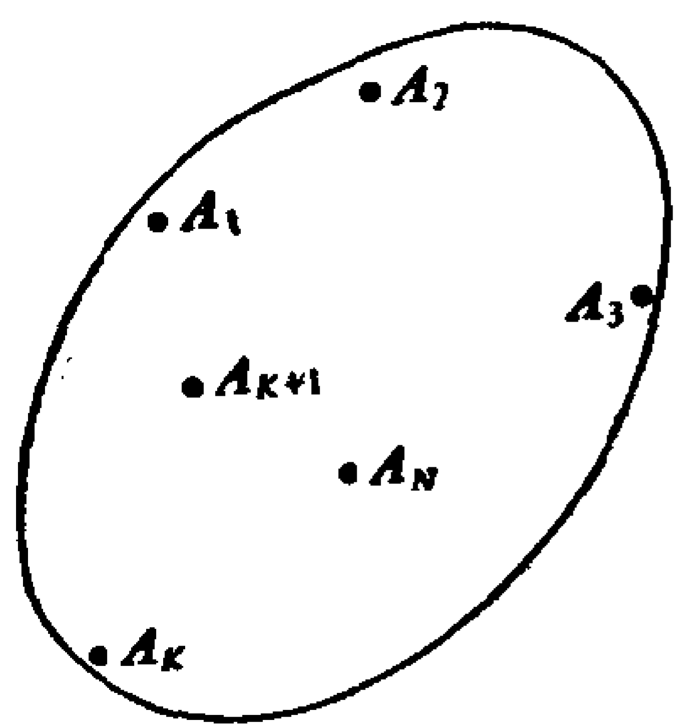


图 62

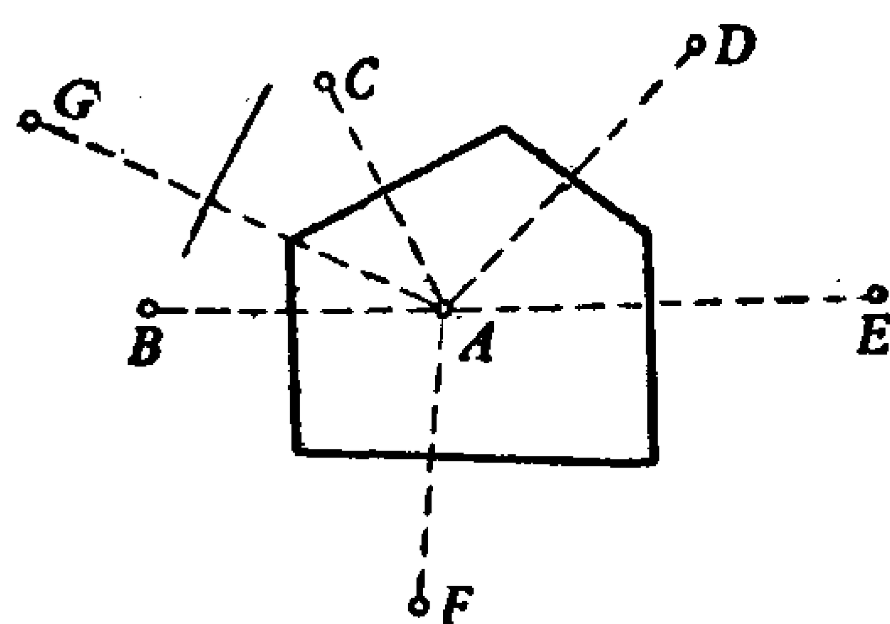


图 63

这种修正的想法在于認为水庫边上的点的影响范围只有中間的点的一半.

更精确地考虑到每一点的影响范围問題，在估算矿藏儲量时，有下面的 Болдырев 最近地区法.

将每个勘探点与其相邻近的勘探点用直綫联接起来，这些直綫段的中垂綫相交而成的多边形就叫做这个勘探点的影响圈. 圈内任一点至該勘探点的距离都比至其他勘探点的距离近，如图 63 所示. 这样就把矿藏的水平投影面积划分成了若干个多边形之和，如图 64 所示. 容积 V 就可以用下式

$$V = \sum_{i=1}^{N} B_i h_i \tag{3}$$

来計算，此处 h_i 为第 i 个勘探点所采得的厚度，而 B_i 则为第 i 个勘探点的影响圈的面积.

为了簡易地划出諸綫段的中点和中垂綫起見，常常采用图 65 所示的模板.

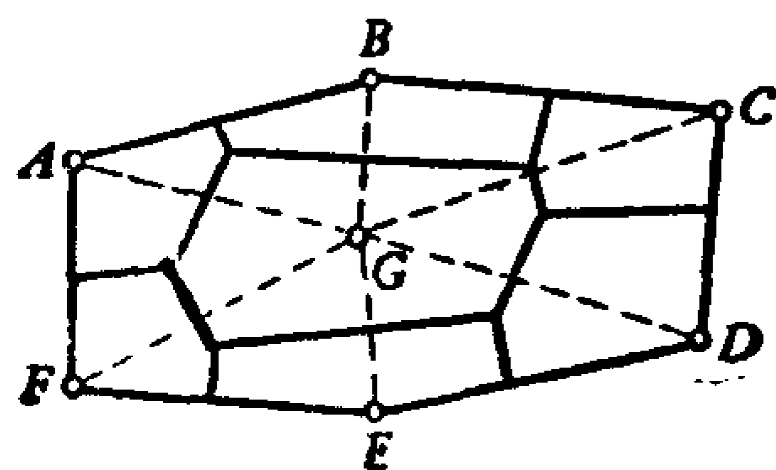


图 64

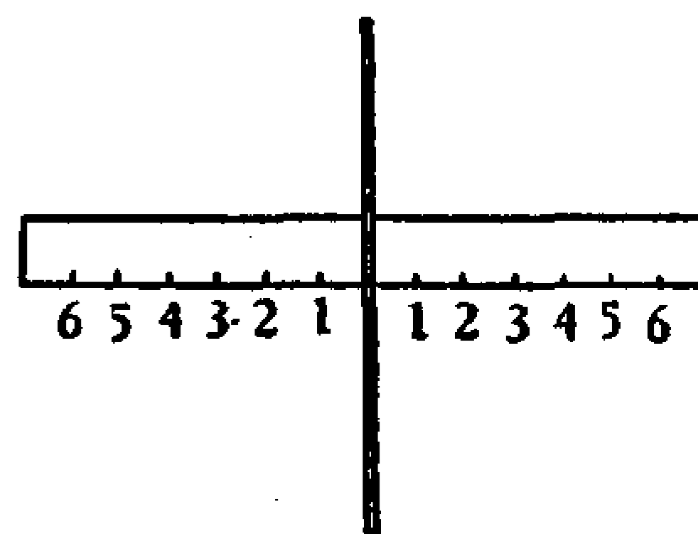


图 65

2. 借助于等高綫图的方法

假定沒有修水庫前，我們有一幅画了等高綫的地形图，高程差是 h，地图上的一圈，实际上便是一定高程的水平面. 下面我們介紹几种借助于等高綫图来估計容积的方法.

(i) Соболевский 体积方格法. 在等高綫图上，打上边长为 d 的方格. 利用等高綫图估計一下，該方格中心的深度，例如图 67 中有阴影的一格的中心的深度为 2.6，則水庫

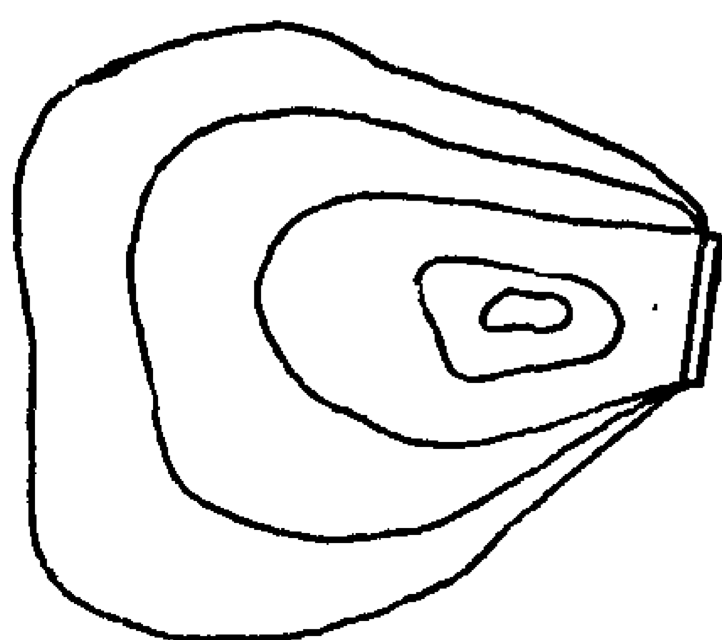


图 66

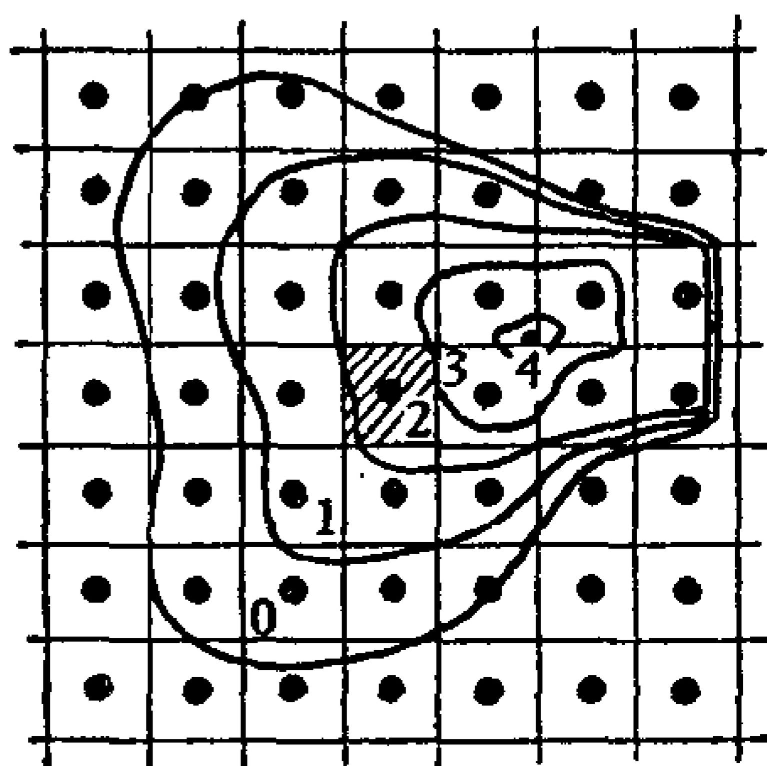


图 67

的容积 V 可以用所有落在等高綫图中的方格的中心的深度之和乘以 d^2 来計算，卽

$$V = (\sum h)d^2, \tag{4}$$

此处 $\sum h$ 为落在等高綫图中的方格的中心的深度之和.

(ii) 截錐公式、梯形公式及 Бауман 公式. 我們首先来估算水庫在相邻两等高綫所表示的水位之間的容积. 以 A, B 各表示上，下两个等高綫所包围的截面（它們的面积亦記为 A, B），它們之間的距离为 h. 常用下面三个公式来近似計算水庫在这两个水位間的容积.

截錐公式: $$v_1 = \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}), \tag{5}$$

梯形公式: $$v_2 = \frac{h}{2}(A + B), \tag{6}$$

Бауман 公式: $$v = h\left[\frac{1}{2}(A + B) - \frac{T(A, B)}{6}\right]. \tag{7}$$

通常当 $\frac{A - B}{A} > 40\%$ 时，用公式(5)，而当 $\frac{A - B}{A} < 40\%$ 时，用公式(6). 公式(7)中的 $T(A, B)$ 是用以下方法所画出的图形的面积，称它为 Бауман 改正数.

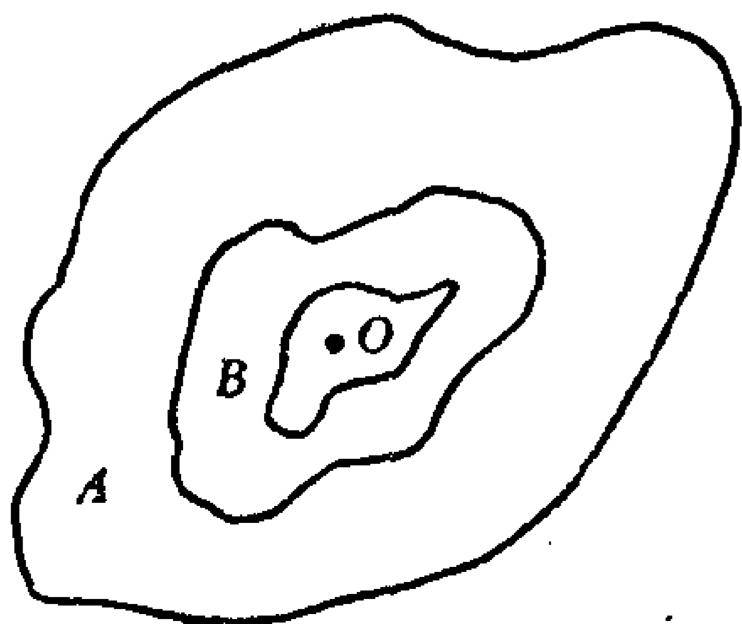


图 68

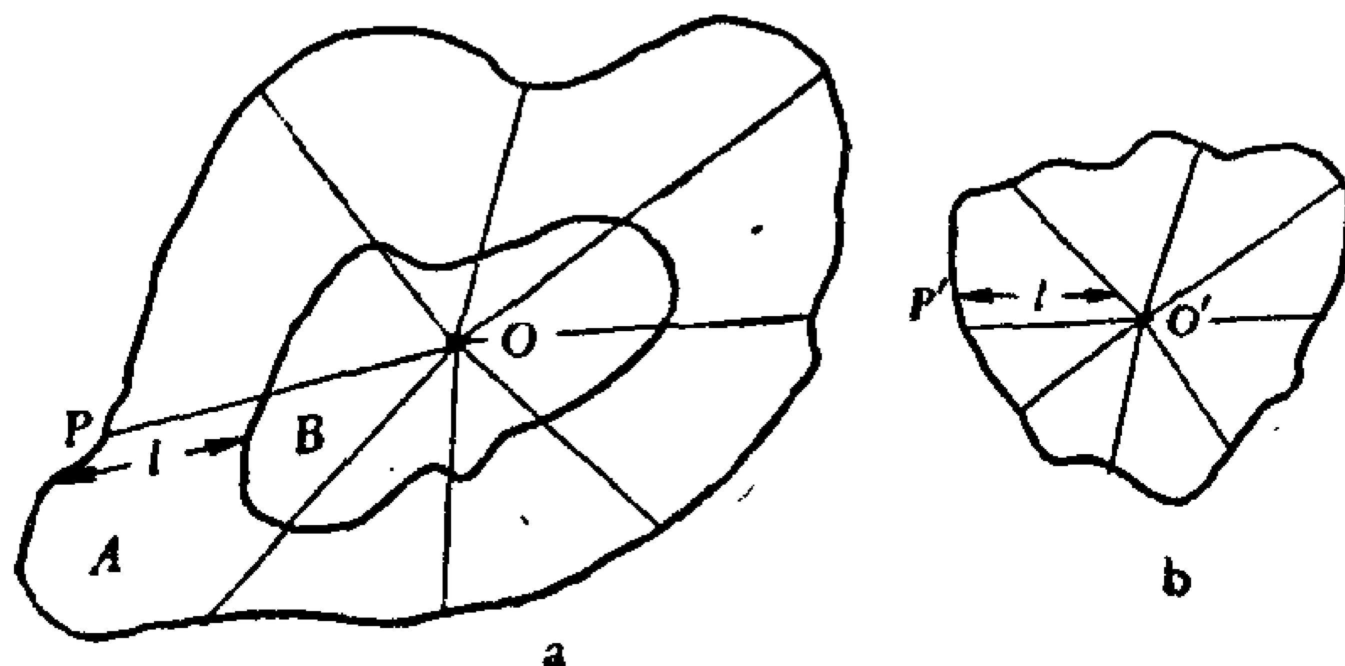


图 69

从制高点 O 出发，作放射綫 OP. 这射綫在地图上 A, B 之間的长度是 l. 另作一图，取一点 O'. 与 OP 同方向，取 $O'P' = l$. 当 P 沿着 A 的周界走一圈时，P' 也得一图形. 这图形的面积就称为 Бауман 改正数. 因为它依賴于两截面 A 与 B，所以我們用 $T(A, B)$ 来表示它.

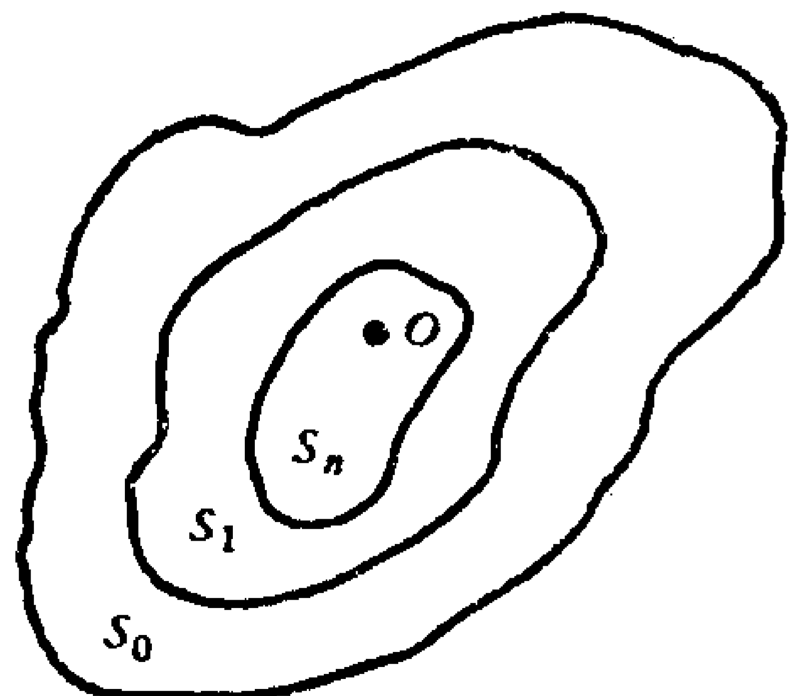


图 70

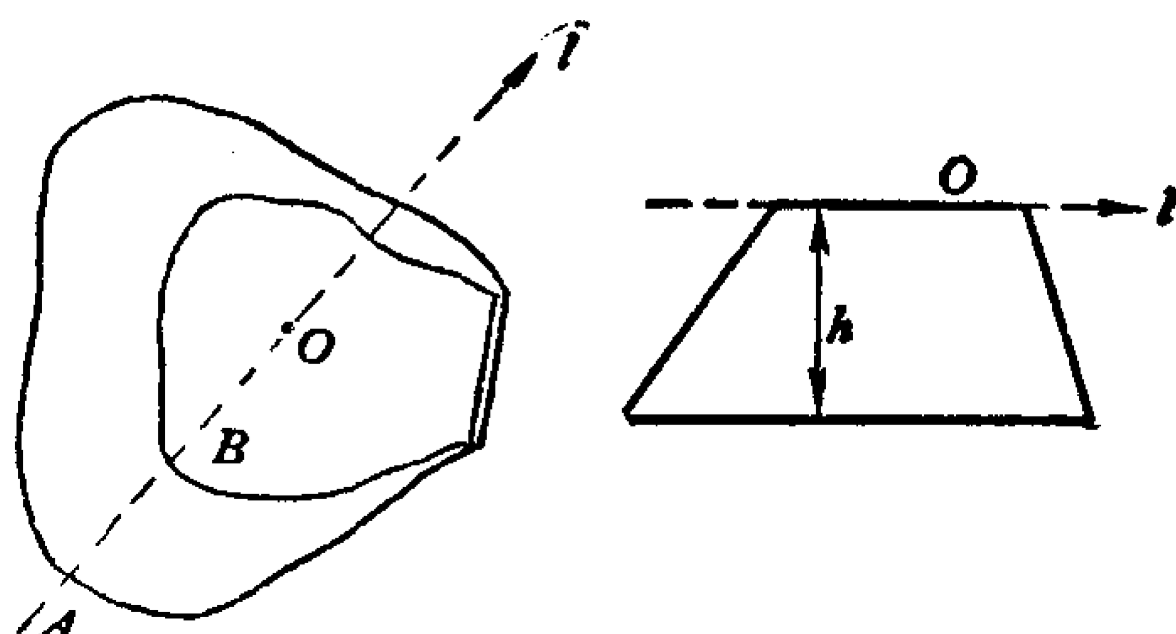


图 71

把算出来的体积一片一片地加起来，就得到水庫的容积. 換言之，設水庫的等高綫图的 $n+1$ 条等高綫所围成的截面依次为 $S_0, S_1, \cdots, S_n$, S_n 即最低点 O（它們的面积亦分別記为 $S_0, S_1, \cdots, S_n$），則水庫的容积分別可以用下面的公式来計算:

$$\text{截錐公式:}\quad V_1 = \left(\frac{S_0+S_n}{3} + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n-1} S_i + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{S_iS_{i+1}}\right)h \tag{8}$$

$$\text{梯形公式:}\quad V_2 = \left(\frac{S_0+S_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} S_i\right)h \tag{9}$$

$$\text{Бауман 公式:}\quad V = \left(\frac{S_0+S_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} S_i\right)h - \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1} T(S_i, S_{i+1}). \tag{10}$$

关于 Бауман 公式，有次之定理.

定理 1 (Бауман). 已知物体的下底 A 与上底 B（其面积亦記为 A, B）均为平面，且 A 平行于 B, h 为它們之間的高，O 为 B 上的某一点. 若用任意通过 O 而垂直于 B 的平面来截物体，所得的截面都是四边形，則物体的体积 v 恰如公式 (7) 所示.

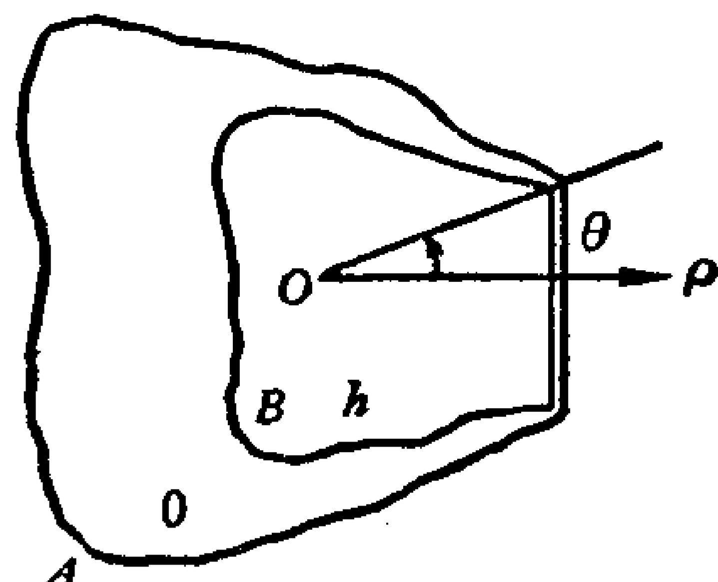


图 72

証. 以 O 为中心引进极坐标. 命高度为 z 的等高綫的极坐标方程为

$$\rho = \rho(z, \theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

其中 $\rho(z, 0) = \rho(z, 2\pi)$. 今后我們常假定 $\rho(z, \theta)(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h)$ 是連續的. 我們不妨假定 A, B 的高程各为 0 及 h. 我們記

$$\rho_1(\theta) = \rho(0, \theta), \quad \rho_2(\theta) = \rho(h, \theta).$$

由假定可知

$$\rho(z, \theta) = \frac{z}{h}\rho_2(\theta) + \frac{h-z}{h}\rho_1(\theta) \quad (0 \leqslant z \leqslant h),$$

因此物体的体积 v 为

$$\frac{1}{2}\int_0^h\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\theta)d\theta\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^h\left(\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\right)^2dz\,d\theta=$$

$$=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)}{3}\right)d\theta=$$

$$=\frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta\right]-$$

$$-\frac{h}{6}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2d\theta\right]=$$

$$=\frac{h}{2}(A+B)-\frac{h}{6}T(A,B).$$

定理証完.

关于截錐公式、梯形公式及 Бауман 公式的关系，我們有次之結果.

定理 2. 不等式

$$v\leqslant v_1\leqslant v_2 \tag{11}$$

恆成立. 当且仅当物体为截錐，且此錐体的頂点至底面 A 的垂綫通过点 O 时，$v=v_1$；当且仅当 $A=B$ 时，$v_1=v_2$.

証. 如 Бауман 定理証明中的假定. 由 Бауман 公式及 Буняковский-Schwarz 不等式可知

$$v=\frac{h}{6}\int_0^{2\pi}(\rho_1^2(\theta)+\rho_2^2(\theta)+\rho_1(\theta)\rho_2(\theta))d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{h}{3}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)\,d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta}\right]=$$

$$=\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB})=v_1.$$

当且仅当 $\rho_1(\theta)=c\rho_2(\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, c 为常数)时，即当这物体为一个截头錐体，而此錐体的頂点至底面 A 的垂綫通过点 O 时，才会取等号(图 73).

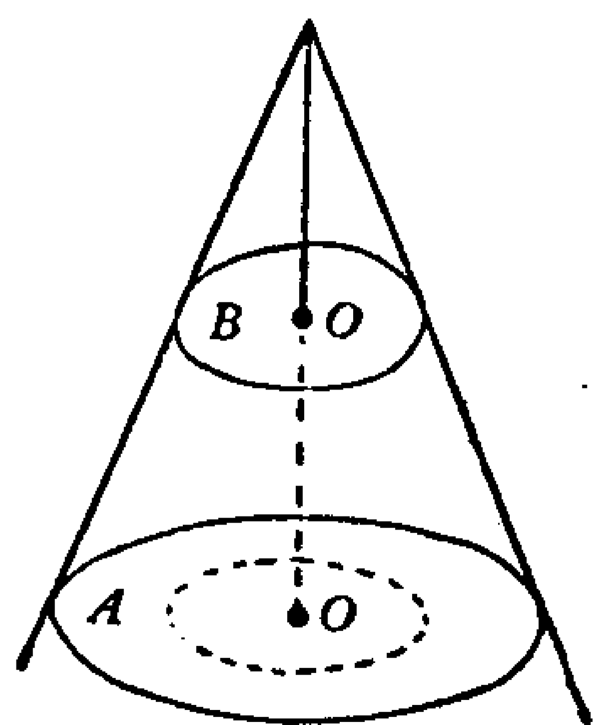


图 73

又由于

$$v_2-v_1=\frac{h}{2}(A+B)-\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB})=$$

$$=\frac{h}{6}(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2\geqslant 0,$$

所以

$$v_1\leqslant v_2,$$

当且仅当 $A=B$ 时取等号. 定理証完.

关于这三个公式的比較問題，我們認为主要应該从量綱来看. 面的量綱为 2，所以把面的量綱考虑为 1 所得出的公式，局限性往往是比較大的.

梯形公式是将中間截面看成上底与下底的算术平均而得到的，所以把面的量綱当作1.

Бауман 公式则是将中間截面作为量綱 2 来考虑的. 詳言之,它是假定了 $\rho(z, \theta)$ 为 $\rho(0, \theta)$ 与 $\rho(h, \theta)$ 关于 z 的綫性关系而得到的(見定理 1).

截錐公式亦是将中間截面的量綱考虑为 2,但比 Бауман 公式还多假定了 $\rho(0, \theta) = c\rho(h, \theta)(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, 此处 c 为一常数.

因此我們認为 Бауман 公式更具有普遍性,所以用它来近似計算物体的体积,一般說来,应該比較精确.但这并不排斥对于某些个别物体,用其他两个公式更恰当些的可能性.例如有一梯形, 其上底与下底的寬度相等(图 74). 用梯形公式反而能获得它的真正体积,而用 Бауман 公式与截錐公式来計算,結果就偏低了. 不过我們注意此时这梯形的截面的量綱为 1 (由于延 y 軸未变).

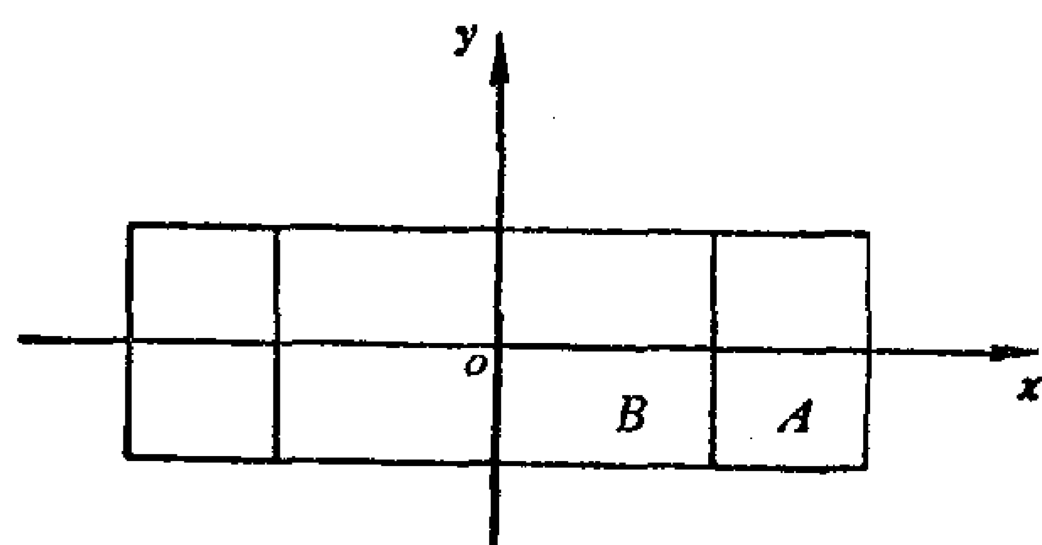


图 74

附記. 相对于 Бауман 公式,我們还可以估計用梯形公式与截錐公式的相对偏差. 例如当 $\frac{A-B}{A} < 40\%$ 时,容易算出

$$\Delta = \frac{v_2 - v}{v} \leqslant \frac{1}{11} < 10\%.$$

(iii) 建議一个估計儲量的公式. Бауман 公式是假定 $\rho(z, \theta)$ 为 $\rho(0, \theta)$ 与 $\rho(h, \theta)$ 关于 z 的綫性关系而得到的. 如果我們将两相邻分层放在一起估計,即已知相邻三等高綫,我們用通过 $\rho(0, \theta)$, $\rho(h, \theta)$ 与 $\rho(2h, \theta)$ 的抛物綫所形成的曲面 $\rho = \rho(z, \theta)$ 来逼近物体这二分层的表面,因此我們建議如下的計算方法.

命 A, B, C 分別表示連續三等高綫所围成的截面(面积亦記为 A, B, C), A 与 B 及 B 与 C 之間的距离都是 h, 则这二片在一起的体积可以用以下公式来近似計算:

$$v_3 = \frac{h}{3}(A + 4B + C) - \frac{h}{15}(2T(A, B) + 2T(B, C) - T(A, C)). \tag{12}$$

如果不計 (12) 式右端的第二项,就是熟知的 Соболевский 公式(亦即 Simpson 公式).

把算出来的体积二片二片地加起来,就得到水庫的容积. 換言之,設水庫的等高綫图的 $2n+1$ 条等高綫所围成的截面依次为 $S_0, S_1, \cdots, S_{2n}$, S_{2n} 即制高点 O, 它們的面积亦依次記为 $S_0, S_1, \cdots, S_{2n}$ 而高程差为 h, 则水庫的容积由下式来近似計算.

$$V_4 = \frac{h}{3}\left[S_0 + S_{2n} + 4\sum_{i=0}^{n-1} S_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} S_{2i}\right] - \frac{h}{15}\left[2\sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i}, S_{2i+1}) + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i+1}, S_{2i+2}) - \sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i}, S_{2i+2})\right]. \tag{13}$$

注意. 如果等高綫图含有偶数条等高綫,则最上面的一片可以单独估計,而其余的用公式 (13).

定理 3. 已知物体的上底 C 与下底 A 均为平面，B 为中間的截面(面积亦分别記为 C, A, B)，且 A, C 都与 B 平行，A 与 B 之間及 B 与 C 之間的距离都是 h, O 为 C 上一点，若用任意通过 O 而垂直于 C 的平面截物体，所得的截面的周界均由两条直綫及两条抛物綫所构成，則物体的体积 v_3 恰如公式(12)所示。

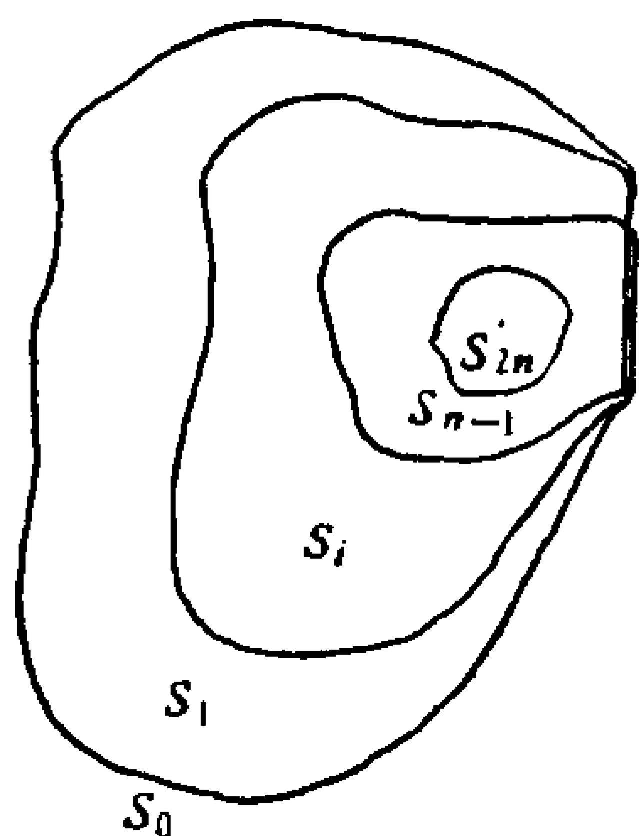


图 75

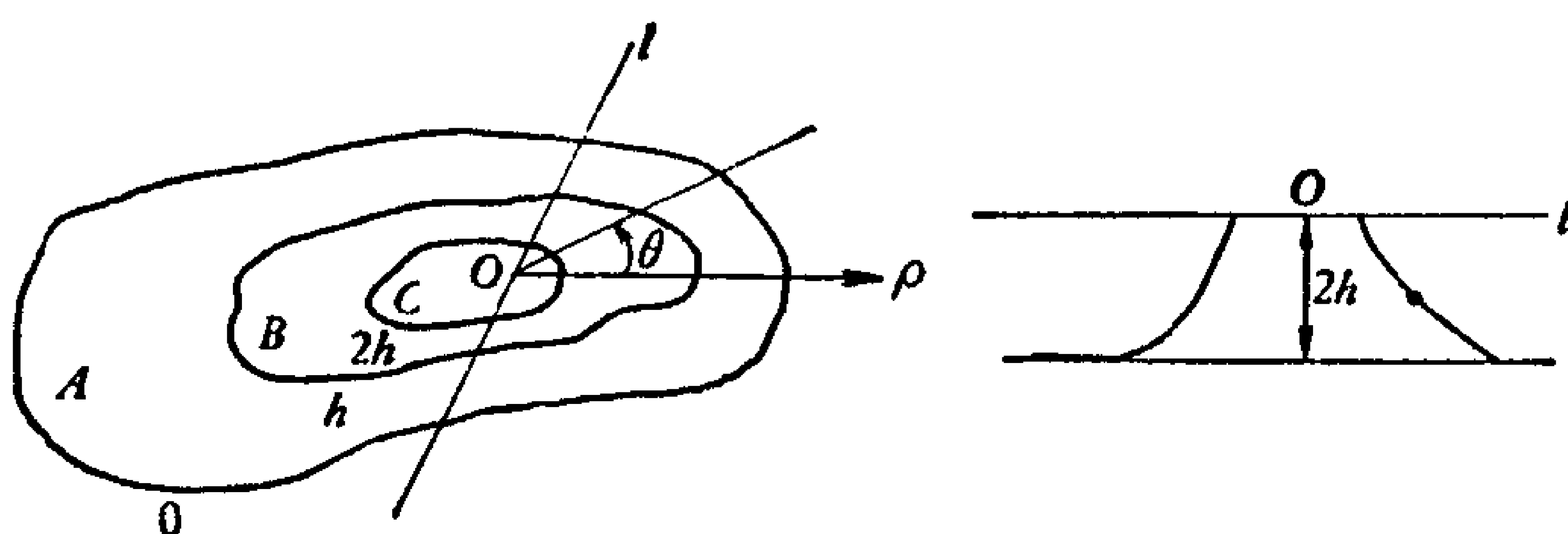


图 76

証. 以 O 为中心引进极坐标，命高度为 z 的等高綫的极坐标方程为

$$\rho=\rho(z,\theta)\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ \rho(z,0)=\rho(z,2\pi)).$$

不妨假定 A, B, C 的高程分别为 0, h, $2h$, 并且記

$$\rho_1(\theta)=\rho(0,\theta),\quad \rho_2(\theta)=\rho(h,\theta),\quad \rho_3(\theta)=\rho(2h,\theta).$$

由假定可知

$$\rho(z,\theta)=\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta)-\frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta)+\frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta).$$

因此物体的体积 v_3 为

$$\frac{1}{2}\int_0^{2h}\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\theta)d\theta\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2h}\left[\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta)-\right.$$

$$\left.-\frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta)+\frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta)\right]^2dz=$$

$$=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{15}\rho_1^2(\theta)+\frac{16}{15}\rho_2^2(\theta)+\frac{4}{15}\rho_3^2(\theta)+\frac{4}{15}\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{15}\rho_2(\theta)\rho_3(\theta)-\frac{2}{15}\rho_1(\theta)\rho_3(\theta)\right]d\theta=$$

$$=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{4\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_3^2(\theta)}{3}-\frac{2}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{15}(\rho_2(\theta)-\rho_3(\theta))^2+\frac{1}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_3(\theta))^2\right]d\theta=$$

$$=\frac{h}{3}(A+4B+C)-\frac{h}{15}(2T(A,B)+2T(B,C)-T(A,C)).$$

定理証完.

(iv) Золотарев 方法. 在估計矿藏儲量时，当勘探綫不平行时，我們所得到的是矿体的不平行剖面.

命 A, B 分别表示矿体沿两条不平行的勘探綫的垂直剖面(面积亦記为 A, B). α 表示 A 与 B 所在的平面的交角(以弧度示之). 取这两张平面的交綫为 z 軸. 又命 ρ_1 与 ρ_2 分别表示 A 与 B 的质量中心至 z 軸的距离. Золотарев 建議用下面的公式来計算夾在这两张平面之間的矿体体积:

$$v_4 = \frac{\alpha}{6}\left[\rho_1(2A + B) + \rho_2(A + 2B)\right]. \tag{14}$$

定理 4 (Золотарев). 依反时針方向, 任意通过 z 軸的半平面皆对应于一个角度 $\theta(0 \leqslant \theta < 2\pi)$. 記該半平面为 (θ). 若有物体夾在 (0) 与 (α) 之間, 它在半平面 (θ) 上的截面为 $S(\theta)$ (面积亦記为 $S(\theta)$), $S(\theta)$ 的质量中心至 z 軸的距离为 $\rho(\theta)$, 而且满足 $S(\theta) = A + \frac{B - A}{\alpha}\theta$, $\rho(\theta) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha}\theta$, 此处 $A = S(0)$, $B = S(\alpha)$, $\rho_1 = \rho(0)$, $\rho_2 = \rho(\alpha)$, 則物体的体积 v_4 恰如公式(14)所示.

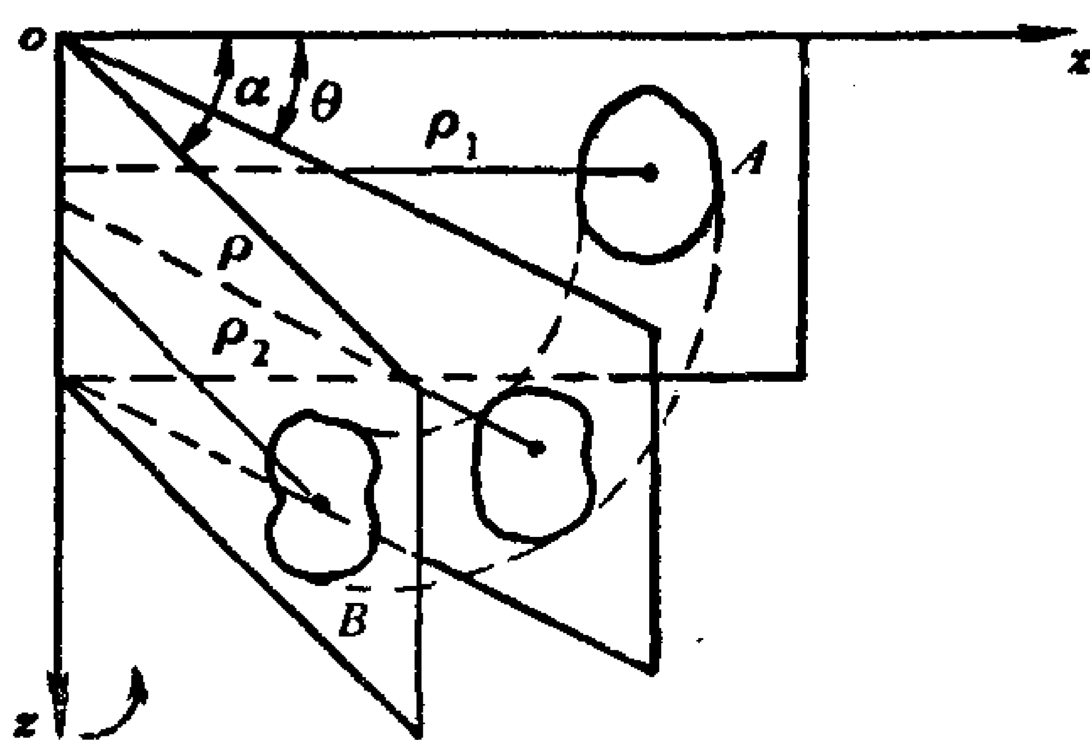


图 77

証. 在空間引进直角坐标, 以 x 軸的正向过半平面(0). 命物体所占的区域为 (V), 則其体积 v_4 为

$$v_4 = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz,$$

变换成柱面坐标 (r, θ, z). 因为

$$\rho(\theta) = \frac{\iint\limits_{S(\theta)} r\,dr\,dz}{\iint\limits_{S(\theta)} dr\,dz} = \frac{\iint\limits_{S(\theta)} r\,dr\,dz}{S(\theta)},$$

所以

$$v_4 = \int_0^\alpha d\theta \iint\limits_{S(\theta)} r\,dr\,dz = \int_0^\alpha S(\theta)\rho(\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^\alpha \left[A + \frac{B - A}{\alpha}\theta\right]\left[\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha}\theta\right]d\theta =$$

$$= \frac{\alpha}{6}\left[\rho_1(2A + B) + \rho_2(A + 2B)\right].$$

定理証完.

§11. 求表面积

現在先介紹矿学家和地理学家所常用的方法, 假定地图上以 Δh 为高程差画出等高綫, 今后我們常假定有一制高点及等高綫成圈的情况来討論(其他情况也可以十分容易地被推导出来). 我們假定由制高点向外一圈一圈地画等高綫 (l_{n-1}), (l_{n-2}), $\cdots$, (l_0).

取 (l_0) 的高度为 0，而制高点用 (l_n) 表之，它的高度是 h. (l_i) 与 (l_{i+1}) 之間的面积用 B_i 表示（即投影的面积）.

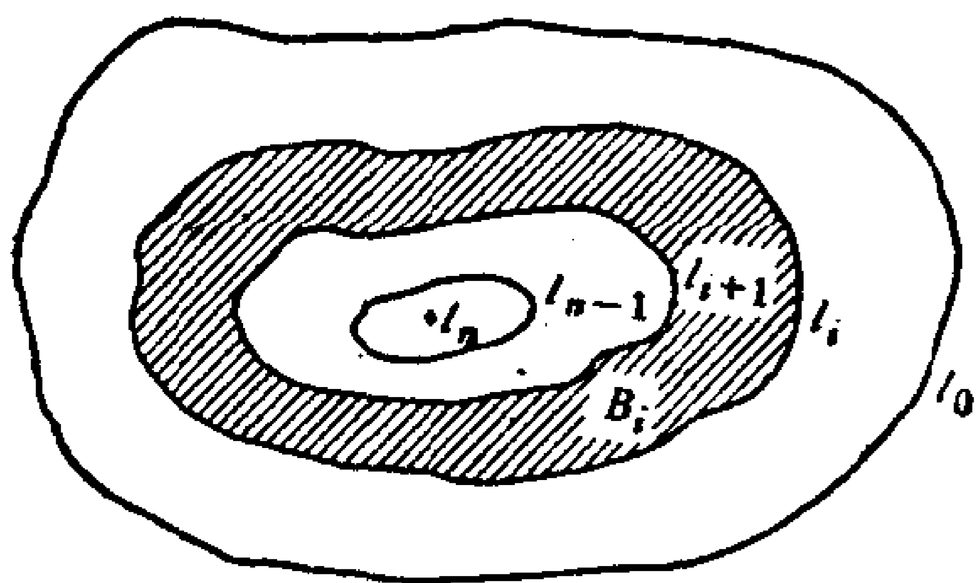


图 78

1. 矿体几何学上常用的方法的步驟如下:

a) $C_i = \frac{1}{2}(l_i + l_{i+1})\Delta h$（中間直立隔板的面积）;

b) $\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 就是所求的斜面积的漸近值（Бауман 方法）.

2. 地理学上常用的方法的步驟如下:

a) $l = \sum_{i=0}^{n} l_i$ 为等高綫的总长度. $B = \sum_{i=0}^{n-1} B_i$ 为总投影面积，由

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta h \cdot l}{B}$$

得出平均傾角 α;

b) $B\sec\alpha = \sqrt{B^2 + (\Delta h \cdot l)^2}$ 就是所求的斜面积的漸近值（Волков 方法）.

附記. $\sqrt{a^2 + b^2}$ 可以借商高定理，用图解法很快求得.

这两个方法哪一个更好一些? 这些方法給出的結果在怎样的程度上迫近斜面积? 換句話說，当等高綫的分布趋向无限精密时（也就是 $\Delta h \to 0$ 时），这些方法所給出的結果是什么? 是否就是真的斜面积呢? 一般說来，答案是否定的. 仅仅是一些十分特殊的曲面，答案才是肯定的. 我們将定出这些曲面来，还将給出这些方法和实际結果的相差比例，并指出避免較大偏差的計算步驟.

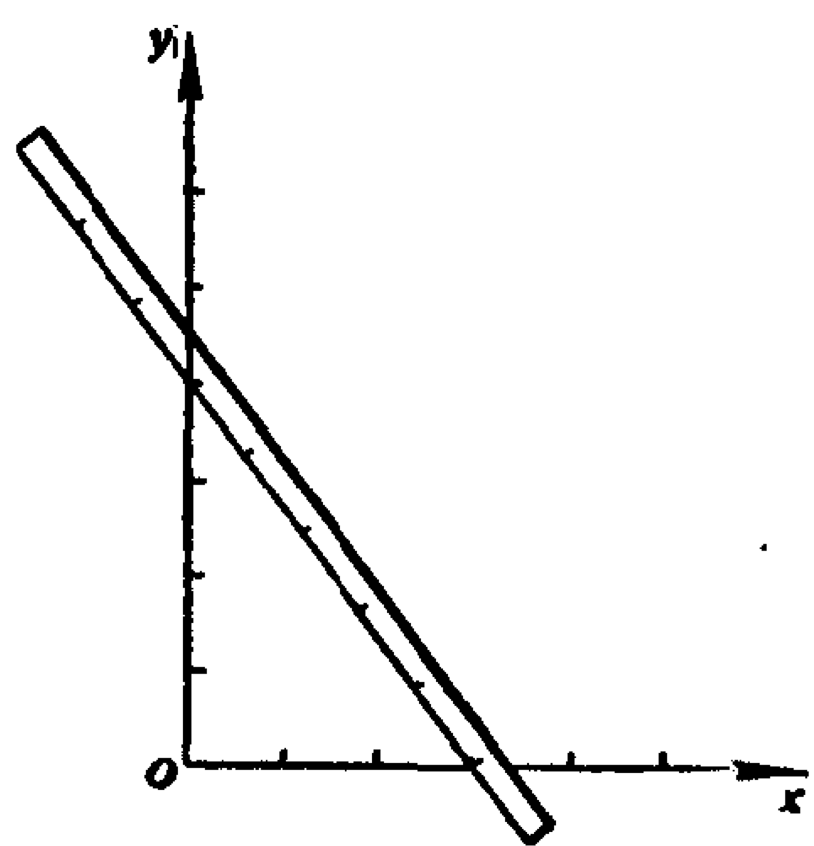


图 79

以制高点为中心引进极坐标. 命高度为 z 的等高綫方程是

$$\rho = \rho(z, \theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

其中 $\rho(z, 0) = \rho(z, 2\pi)$. 我們在今后常假定 $\frac{\partial\rho(z,\theta)}{\partial\theta}$ 与 $\frac{\partial\rho(z,\theta)}{\partial z}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant h)$ 都是連續的. 命 $z_i = \frac{h}{n}i$，則 l_i 所围繞的面积等于

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(z_i, \theta)d\theta.$$

所以由中值公式可知

$$B_i = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\rho^2(z_i, \theta) - \rho^2(z_{i+1}, \theta)]d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\rho(z_i', \theta)\frac{\partial\rho(z_i', \theta)}{\partial z_i'}d\theta\Delta h,$$

此处 z_i' 在 z_i 与 z_{i+1} 之間，而 $\Delta h = \frac{h}{n}$.

另一方面，l_i 的长度等于

$$l_i = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i, \theta) + \left(\frac{\partial \rho(z_i, \theta)}{\partial \theta}\right)^2} d\theta.$$

由 Бауман 方法所得出的結果是

$$C_i = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i'', \theta) + \left(\frac{\partial \rho(z_i'', \theta)}{\partial \theta}\right)^2} d\theta \Delta h,$$

这里又用了中値公式，z_i'' 在 z_i 与 z_{i+1} 之間. 因而当 $\Delta h \to 0$ 时，$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 趋近于

$$\text{Ба} = \int_0^h \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} d\theta\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} dz. \tag{1}$$

这便是用 Бауман 方法算出的斜面积，当 $\Delta h \to 0$ 时所趋向的数值.

又易見

$$B = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(0, \theta) d\theta,$$

及 $\Delta h \cdot l$ 的极限应当等于

$$\lim_{n\to\infty} \Delta h \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i, \theta) + \left(\frac{\partial \rho(z_i, \theta)}{\partial \theta}\right)^2} d\theta = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta.$$

因此用 Волков 方法算出的斜面积，当 $\Delta h \to 0$ 时，所趋的极限是

$$\text{Во} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(0, \theta) d\theta\right)^2 + \left(\int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} dz\right)^2 + \left(\int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} \tag{2}$$

(注意 $\rho(h, \theta) = 0$).

由于

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2\right] d\theta^2 + 2 \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial \rho}{\partial z} d\theta\, dz + \left(1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2\right) dz^2,$$

所以曲面的面积 S 为(参看 § 7)

$$S = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2} d\theta\, dz. \tag{3}$$

为了比較 Ба, Во 与 S 我們引进一个复値函数

$$f(z, \theta) = -\rho \frac{\partial \rho}{\partial z} + i \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2}, \tag{4}$$

則

$$S = \int_0^h \int_0^{2\pi} |f(z, \theta)| d\theta\, dz, \tag{5}$$

$$\text{Ба} = \int_0^h \left| \int_0^{2\pi} f(z, \theta) d\theta \right| dz, \tag{6}$$

及

$$\text{Bo} = \left| \int_0^h \int_0^{2\pi} f(z, \theta) d\theta\, dz \right|. \tag{7}$$

由此可見

$$\text{Bo} \leqslant \text{Ба} \leqslant S. \tag{8}$$

結論: (i) Бауман 方法比 Волков 方法好; (ii) 所求出的結果比眞实的結果常偏低一些; (iii) Бауман 方法既然偏低,因此可以作如下的修改, 即取 $C_i = l_i \Delta h$. 这样既化簡了算法,又增大了数值.

現在再来考虑 Bo $= S$ 及 Ба $= S$ 的曲面. 先耕下面的引理.

引理. 在区間 $[a, b]$ 中,如果 $f(x)$ 是一个实变数的复值函数,則

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx \tag{9}$$

成立的必要且充分的条件是 $f(x)$ 的虚实部分之比是常数.

証. 命 $f(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)}$, $\rho(x) > 0$ 而 $\theta(x)$ 是实的. 显然如果 $\theta(x)$ 与 x 无关,則等式 (9) 成立. 反之,由等式 (9) 可知

$$\int_a^b \int_a^b f(x) \overline{f(y)}\, dx\, dy = \int_a^b \int_a^b \rho(x)\rho(y) e^{i[\theta(x)-\theta(y)]} dx\, dy =$$

$$= 2 \iint\limits_{a \leqslant x < y \leqslant b} \rho(x)\rho(y) \cos[\theta(x) - \theta(y)] dx\, dy =$$

$$= 2 \iint\limits_{a \leqslant x < y \leqslant b} \rho(x)\rho(y) dx\, dy,$$

即

$$\iint\limits_{a \leqslant x < y \leqslant b} \rho(x)\rho(y)\{1 - \cos[\theta(x) - \theta(y)]\} dx\, dy = 0.$$

因而得出

$$\cos[\theta(x) - \theta(y)] = 1,$$

即

$$\theta(x) = \theta(y).$$

此即引理所需.

易知对于多重积分,引理亦眞(請讀者自証).

由引理可知

$$\text{Bo} = \left| \int_0^{2\pi} \int_0^h f(z, \theta) dz\, d\theta \right| = \int_0^{2\pi} \int_0^h |f(z, \theta)| dz\, d\theta = S$$

成立的必要且充分的条件是 $f(z, \theta)$ 的虚实部分之比是常数. 于是得偏微分方程

$$\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 = c^2 \left(-\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2. \tag{10}$$

換言之, 仅有适合于微分方程(10)的函数 $\rho = \rho(z, \theta)$, Волков 方法才能給出正确答案. 当然还要适合以下的条件: $\rho(h, \theta) = 0$ (这是制高点), 及 $\rho(0, \theta) = \rho_0(\theta)$ (这是底盘 l_0 的曲綫方程).

我們并不解微分方程(10)，而从(10)的几何意义入手．把 θ 与 z 看成参变数，即

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z,$$

而 ρ 是 θ 与 z 的函数．由

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\cos\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\sin\theta,\qquad \frac{\partial z}{\partial z}=1$$

得知在曲面上点 (θ,z) 的法綫方向是

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,\ -\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta+\rho\sin\theta,\ -\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right).$$

它与 z 軸的交角 α (即点 (θ,z) 的傾角)的余弦 $\left(由(10)及\ \frac{\partial\rho}{\partial z}<0\right)$

$$\cos\alpha=\frac{-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\tag{11}$$

是一常数，也就是說这曲面的切平面与 xy 平面成一固定的角度 α．我們来說明这样的曲面的几何性質．

从制高点向 xy 平面作一垂直平面，这平面与該曲面的交綫有次之性質，这曲綫上的每一点的切綫与 xy 平面的夾角等于 α，所以它是一条直綫．

从任一平面封閉曲綫 (l_0) 作底盘，以任一投影在盘內的点 (l_n) 作为制高点．通过制高点与底盘垂直的直綫称为軸．通过 l_0 上任一点 A 作一直綫，它在 A 与軸所成的平面上，与底盘的交角是 α，这样直綫所成的图形便是适合于 Bo $=S$ 的图形．

如果有最高峯，并且向下看沒有陡峭的角度，则仅有以下的曲面才能 Bo $=S$：底盘是圓或圓的若干切綫形成的多角形，或一些圓弧及一些切綫所成的图形，軸的尖端在通过圓心垂直于底盘的直綫上(見图 80)．

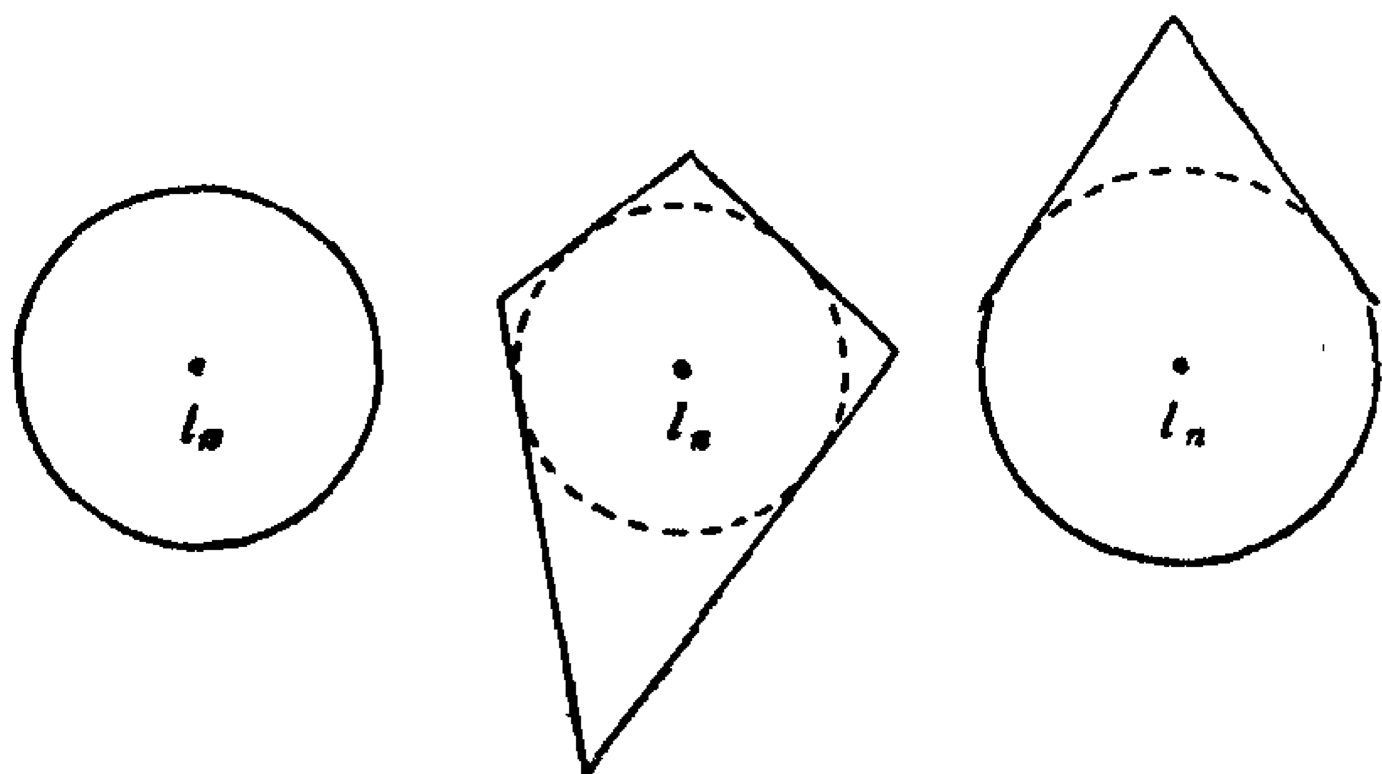


图 80

通俗些說，只有蒙古包、金字塔和一些由此复合出来的图形，才能由 Волков 的方法来无限逼近．

但什么时候 Ба $=S$ 呢？ 当然当 Bo $=S$ 的时候，Ба $=S$．除掉上面所求出的一些曲面外，还有其他曲面否？ 答案：有．証明如下：从

$$\text{Ба}=\int_0^h\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)d\theta\right|dz=\int_0^h\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|d\theta\,dz=S$$

得出

$$\int_0^h\left(\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|d\theta-\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)d\theta\right|\right)dz=0.$$

积分号下的函数是非负的，因此对任一 z 常有

$$\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|d\theta=\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)d\theta\right|.$$

因此当固定 z 时，$f(z,\theta)$ 的虚实部分之比是常数． 也就是説，仅有下面的曲面才能 $\text{Бa}=S$：高程相等之处，曲面有相同的傾角． 用通俗的話説，只有天坛顶，北海白塔及葫芦式的图形才能由 Бауман 的方法来无限逼近.

怎样来估計誤差呢？假定有二常数使

$$0<\xi\leqslant\cos\alpha\leqslant\eta,$$

即

$$\xi\leqslant\frac{-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}}\leqslant\eta.$$

由此可得

$$\frac{\rho^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}{\left(\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}\geqslant1-\eta^2.$$

因而

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\,dz\,d\theta\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{1-\eta^2}\int_0^{2\pi}\int_0^h\sqrt{\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}\,dz\,d\theta=\sqrt{1-\eta^2}\,S.$$

又

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h\left(-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)dz\,d\theta\geqslant\xi\int_0^{2\pi}\int_0^h\sqrt{\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}\,dz\,d\theta=\xi S,$$

因此

$$\text{Bo}\geqslant\sqrt{\xi^2S^2+(1-\eta^2)S^2}=\sqrt{1+\xi^2-\eta^2}\,S.$$

又因为 $1>\eta>\xi>0$，所以

$$\frac{\xi}{\eta}\leqslant\sqrt{1+\xi^2-\eta^2}$$

（将两端平方，此式即 $(\eta^2-\xi^2)(1-\eta^2)\geqslant0$）．故得

$$\text{Bo}\geqslant\frac{\xi}{\eta}S.$$

总而言之，我們証明了下面的結果.

定理 1. 若曲面 $\rho=\rho(z,\theta)$ $(0\leqslant z\leqslant h,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ 上任意点的傾角 α 的余弦都满足 $0<\xi\leqslant\cos\alpha\leqslant\eta$，則不等式

$$\frac{\xi}{\eta}S\leqslant\text{Bo}\leqslant\text{Бa}\leqslant S\tag{12}$$

成立. Bo $= S$ 的充要条件是曲面的任意点都有相同的傾角，Ба $= S$ 的充要条件是曲面在高程相等处的点有相同的傾角.

由此可见，只有当曲面上的点的傾角变化不大时，Волков 方法才能得到精确結果，而只有当曲面在相邻两高程間的点的傾角相差不大时，Бауман 方法才能給出精确的結果. 然而在其他情况下，用这种方法的誤差就可能比較大了.

因此我們建議如下的算法：在等高綫图上，通过制高点 (l_n) 引进若干条放射綫 (θ_0), (θ_1), $\cdots$, (θ_{m-1})，此处 (θ_j) 的幅角为 $\frac{2\pi}{m}j$. 放射綫 (θ_j), (θ_{j+1}) 与等高綫 (l_i), (l_{i+1}) 所围成的面积記为 d_{ij}. (l_i) 被 (θ_j) 与 (θ_{j+1}) 所截取的一段的长度記之为 l_{ij}.

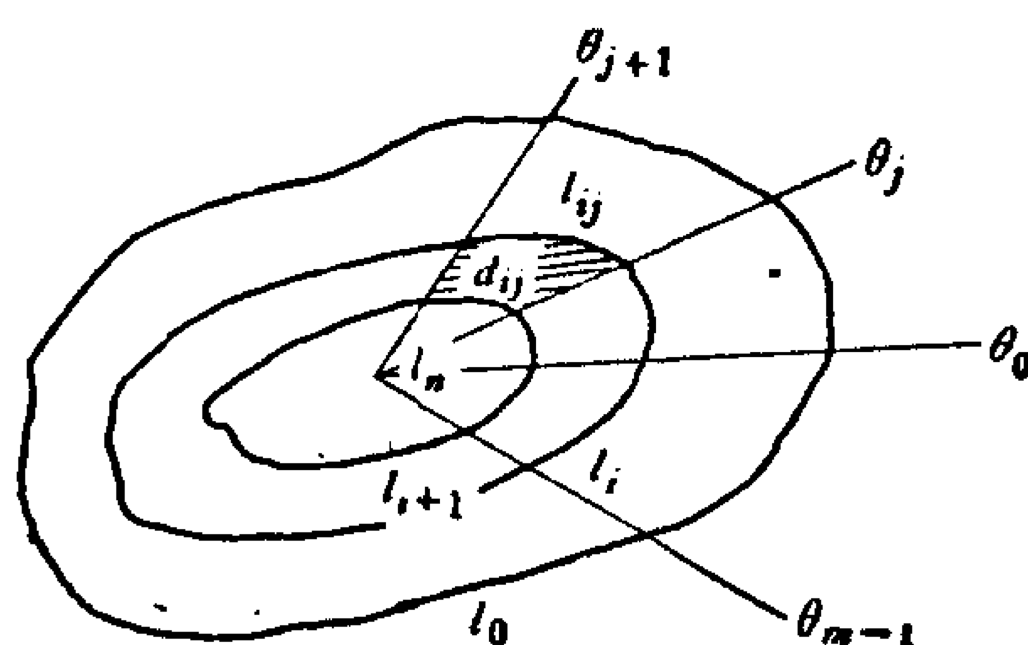


图 81

方法 (i)

a) $D_j = \sum_{i=0}^{n-1} d_{ij}$（等高綫图在放射綫 (θ_j) 与 (θ_{j+1}) 間的面积）.

b) $E_j = \left(\sum_{i=0}^{n-1} l_{ij}\right)\Delta h$（中間隔板在两直立墙壁之間的面积之和）.

c) $\sigma_1 = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{D_j^2 + E_j^2}$ 就是所求曲面的漸近值.

方法 (ii)

a) $c_{ij} = l_{ij}\Delta h$（中間隔板在两直立墙壁之間的面积）.

b) $\sigma_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{c_{ij}^2 + d_{ij}^2}$ 就是所求曲面的漸近值.

用同样的方法，可知当 $\Delta h \to 0$, $m \to \infty$ 时，σ_1 与 σ_2 所趋近的值分别为

$$K = \int_0^{2\pi} \int_0^h |f(z, \theta) dz| d\theta \tag{13}$$

及

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^h |f(z, \theta)| dz\, d\theta,$$

显然 Bo $\leqslant K \leqslant S$. 同样可知 $K = S$ 的充要条件为曲面为直紋面. 由于 σ_2 趋于眞面积，所以用方法 (ii) 最为精密可靠.

第十六章　綫积分，面积分

§1. 曲綫积分的定义(第一型)

假定空間有一条曲綫 (l)，它具有确定的方向，并且假定 A 是它的起点而 B 是終点．这曲綫的弧长从 A 算起．假設在这曲綫上定义了一个函数 $f(P)$，P 是曲綫上的一点，我們在曲綫上依次取分点

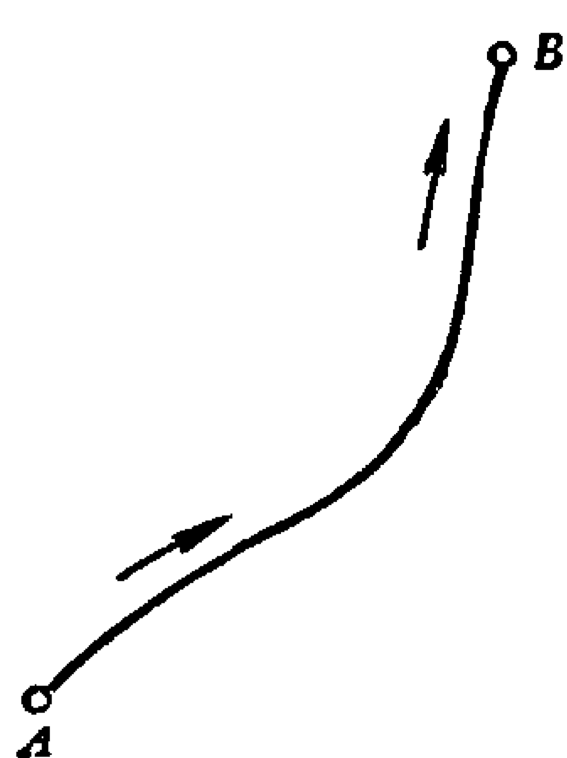


图 82

$$P_0 = A,\ P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{n-1},\ P_n = B.$$

在 P_iP_{i+1} 中任取一点 P_i'，作和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(P_i')\Delta S_i,$$

此处 ΔS_i 是 P_iP_{i+1} 間的弧长，当分割无限精密时，即 $n\to\infty$，且所有 ΔS_i 都 $\to 0$ 时，如果极限存在，則称为函数 $f(P)$ 沿曲綫 (l) 的积分，并且記之为

$$\int_{(l)} f(P)ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(P_i')\Delta S_i. \tag{1}$$

由于 (l) 上的变点 P 的位置完全可以用由 A 点算起的弧长 s 来确定，所以 $f(P)=f(s)$，因而积分 (1) 便是通常的积分

$$\int_{(l)} f(P)ds = \int_0^l f(s)ds,$$

此处 l 是 (l) 的弧长．注意，曲綫 (l) 可以是封閉的，就是說，B 可以与 A 重合．

如果曲綫是由参变数 t 表达出来的：

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),$$

如果当 $t=t_0$ 变到 $t=t_1$ 时，曲綫由 (A) 变到 (B)，則

$$\int_{(l)} f(P)ds = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt.$$

如果 $t_0<t_1$，則用正号，反之用負号．

再假定 t 就是 x，因此

$$\int_{(l)} f(P)ds = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\psi(x),\chi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)+\chi'^2(x)}\,dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_1}\frac{f(x,\psi(x),\chi(x))}{|\cos\alpha|}dx,$$

这儿

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2(x)+\chi'^2(x)}}.$$

由于曲綫 (l) 的切綫方向是

$$(1,\ \psi'(x),\ \chi'(x)),$$

所以 α 就是这切綫与 x 軸的夾角.

取 $f(P)=1$, 我們特别有曲綫的长度

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{|\cos\alpha|}.$$

对于平面上的曲綫,也有这些相同的結果.

例 1. 在第一象限內沿橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 求积分 $I=\int_{(l)}xyds$. 由于

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},\quad \sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}},$$

可知

$$\int_{(l)}xy\,ds=\int_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx=\frac{b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,x\,dx$$

$$=\frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\,\frac{2}{3}\,[a^4-(a^2-b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{ab}{3}\,\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

例 2. 沿曲綫

$$x=t,\quad y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3},\quad z=\frac{1}{2}t^2$$

求 t 由 0 到 1 的积分

$$\int_{(l)}xyz\,ds.$$

它等于

$$\int_0^1 t\cdot\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}\cdot\frac{1}{2}t^2\sqrt{1+2t+t^2}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1+t)\,dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

例 3. 在极坐标下,求綫积分的公式. 由于

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2,$$

所以有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.$$

在球坐标下,求綫积分的公式. 由于

$$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2+r^2\sin^2\varphi\,d\theta^2,$$

所以有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\sqrt{r'^2+r^2\varphi'^2+r^2\sin^2\varphi}\,d\theta.$$

曲綫积分的最好的应用之一,便是求出質量不均匀的綫型物質的質量.

仍如以上的符号, 但假定 $\rho(x,y,z)$ 是物質在点 (x,y,z) 的密度, 如此在曲綫 (l) 上由 (A) 到 (B) 的总質量便等于

$$\int_{(l)}\rho(x,y,z)ds.$$

例 4. 命 (l) 表 $y=\log x$，假定这曲綫在每点的密度等于該点横坐标的平方，求从 x_1 到 x_2 这曲綫的質量

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \frac{1}{3}((1+x_2^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}).$$

曲綫积分还可以用来求分布在不均匀的曲綫 (l) 上的質点对一已給質量为 m 的質点 M 的吸引力. 設将 (l) 分成許多小段 (σ_i)，其长度仍記为 σ_i. 先許每一段的質量都集中在它上面的某一点 M_i，則吸引力在坐标軸上的投影可以近似地表示为

$$X \doteq \sum_i \frac{m\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\cos\theta_i, \quad Y \doteq \sum_i \frac{m\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\sin\theta_i,$$

此处 $\rho(M_i)\sigma_i$ 表示 M_i 所在的小段的質量的近似值，r_i 表示矢量 $\overrightarrow{MM_i}$ 的长度，而 θ_i 表示矢量 $\overrightarrow{MM_i}$ 与 x 軸的夾角. 当 $\operatorname{Max}\sigma_i \to 0$ 时，則得

$$X = m\int_{(l)} \frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2} ds, \quad Y = m\int_{(l)} \frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2} ds.$$

例 5. 求星形綫 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 在第一象限的弧对于位于坐标原点的单位質量的吸引力. 假定曲綫上每一点的密度等于这一点到原点的距离的立方，

$$X = \int_{(l)} \frac{r^3\cos\theta}{r^2} ds = \int_{(l)} x ds = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^4 t\, dt = -3a^2 \frac{\cos^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5},$$

$$Y = \int_{(l)} \frac{r^3\sin\theta}{r^2} ds = \int_{(l)} y ds = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\, dt = 3a^2 \frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5}.$$

§ 2. 曲綫积分(第二型)

命 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 是三个函数，在曲綫 (l) 上定义，我們考虑积分

$$\int_{(l)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{1}$$

这积分的意义便是

$$\sum_{i=0}^{n-1} (P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i)$$

的极限，即把曲綫 (l) 分为 n 份 $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$，在每份中取一任意点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，把 $P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 乘以 Δx_i, $Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 乘以 Δy_i, $R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 乘以 Δz_i，加之，命 $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ 的长度都趋于零，这和的极限便是(1)，此处 Δx_i, Δy_i, Δz_i 分别表示曲綫段 $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ 在 x 軸，y 軸及 z 軸上的投影的长度.

用参数表示式

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t),$$

則 (1) 的表达如下：

$$\int_A^B [P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)]dt.$$

命 $\mathbf{t}$ 表示在 (ξ, η, ζ) 的切綫，则

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\mathbf{t}, \mathbf{x}), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\mathbf{t}, \mathbf{y}), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\mathbf{t}, \mathbf{z}),$$

此处 $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 表示 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夾角的余弦．所以

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(l)} (P\cos(\mathbf{t}, \mathbf{x}) + Q\cos(\mathbf{t}, \mathbf{y}) + R\cos(\mathbf{t}, \mathbf{z}))ds.$$

显然有以下的一些性質：

1）如果 (l) 是由各部分 $(l_1), (l_2), \cdots, (l_n)$ 組成的，则

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(l_1)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz +$$
$$+ \int_{(l_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \cdots + \int_{(l_n)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

2）曲綫积分的数值不仅是由被积函数与积分曲綫来确定的，它与曲綫 (l) 的方向也有关系，并当改变积分路綫的方向时，曲綫积分值亦变号。

例 1. 沿椭圓

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

上半部求出

$$\int_{(l)} (x^2 + 2xy)dy.$$

用参变数表达式 $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, 如此則得

$$\int_{(l)} (x^2 + 2xy)dy = \int_0^\pi (a^2\cos^2 t + 2ab\cos t\sin t)b\cos t\,dt =$$
$$= a^2 b\int_0^\pi \cos^3 t\,dt + 2ab^2\int_0^\pi \cos^2 t\sin t\,dt = \frac{4}{3}ab^2.$$

例 2. 沿星形綫 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, 由 $(a, 0)$ 到 $(0, a)$ 求积分

$$\int_{(l)} \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}.$$

这积分等于

$$3a^{4/3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{3}{16}\pi a^{4/3}.$$

說明本节所定义的綫积分的最好的例子，是力学中关于功的計算，原則是：

已知在点 P 处有一个力 $\mathbf{F}$．如果要把 P 点的質量为 m 的物質移一位移 $\mathbf{l}$，则所得的功等于

$$|\mathbf{F}||\mathbf{l}|\cos(\mathbf{F}, \mathbf{l}),$$

这儿 $|\mathbf{F}|$ 是力的大小，$|\mathbf{l}|$ 是位移的长短，$\cos(\mathbf{F}, \mathbf{l})$ 是它們的夾角余弦．

考虑一个力場，即每一点有一个力，我們研究一个单位質量的点依一条曲綫 (l) 运动所作的功．

把这曲綫分为 n 份：

$$A = A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_{n-1},\ A_n = B.$$

在 A_iA_{i+1} 一段所做的功等于

$$\begin{aligned}\Delta E_i \sim |\mathbf{F}_i|\,\overline{A_iA}_{i+1}\cos(\mathbf{F}_i,\ \overrightarrow{A_iA_{i+1}}) = \\ = |\mathbf{F}_i|\,\overline{A_iA}_{i+1}(\cos(\mathbf{F}_i,\ x)\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}},\ x) + \\ + \cos(\mathbf{F}_i,\ y)\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}},\ y) + \cos(\mathbf{F}_i,\ z)\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, z)).\end{aligned}$$

去掉括号，并用 P, Q, R 記 $\mathbf{F}$ 在 x, y, z 軸上的投影. 所以

$$\Delta E_i \sim P_i\Delta x_i + Q_i\Delta y_i + R_i\Delta z_i,$$

此处用了 $P_i = F_i\cos(\mathbf{F}_i,\ x)$, $\Delta x_i = \overline{A_iA}_{i+1}\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}},\ x)$ 等等，因而全部功为

$$E = \int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

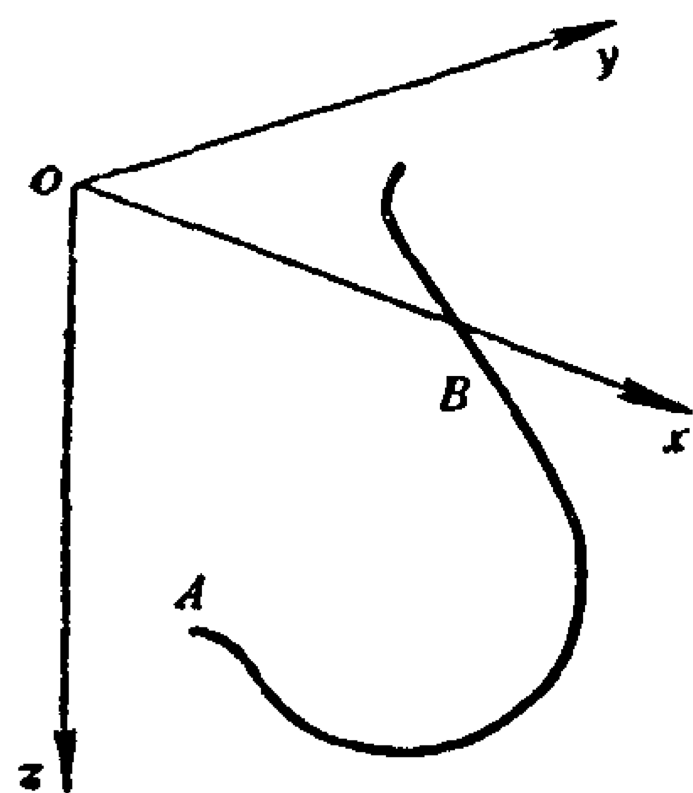


图 83

例 3. 試求質量为 m 的質点 M，由 A 到 B 时地心引力所产生的功.

取坐标軸 z 軸垂直向下，在任一点的引力矢量是

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg.$$

功的全部等于

$$\int_{(l)} mg\,dz = mg(z_B - z_A),$$

即 B 点与 A 点的 z 軸座标之差乘以 mg.

由此可知，功仅与开始点与最終点的位置有关，而与所經过的曲綫无关.

例 4. 求当一質量为 1 的質点 M 由 M_1 移动到 M_2 时，向着質量为 m 的不动質点所作的功.

以不动質点为原点，r 代表向量半径，我們看出力与 $\overline{OM}$ 的方向相反，而大小等于 $\frac{fm}{r^2}$，此处 f 是引力常数，如此求出

$$P = -\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{x}{r}, \quad Q = -\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{y}{r}, \quad R = -\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{z}{r}.$$

所以

$$\begin{aligned}E &= -fm\int_{(l)}\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3} = -fm\int_{(l)}\frac{r\,dr}{r^3} \\ &= fm\int_{(l)} d\left(\frac{1}{r}\right) = fm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),\end{aligned}$$

此处 r_1 与 r_2 是起点与終点对原点的距离.

若引用質点的势量

$$U = \frac{fm}{r},$$

則

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R,$$

而且功等于 $U(M_2) - U(M_1)$，即等于势量差. 用矢量的語言，U 的梯度是力 $\mathbf{F} = (P,$

Q, R)，而功是力对微分矢量 $(d\mathbf{r}) = (dx, dy, dz)$ 的内积的积分，卽功

$$E = \int_{(l)} \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{r}).$$

例 5. 气体在絕热过程中，体积 V，压力 P 及絕对温度 T 之間滿足 Clapeyron 公式

$$PV = RT,$$

此处 R 为常数.

我們来确定气体从状态 (P, V, T) 变为与其无限接近的状态 $(P + dP, V + dV, T + dT)$ 时，所需消耗的热能 dU.

将轉变过程設想为：第一步，气体体积膨大 dV；第二步在固定体积之下，温度改变 dT. 为簡单起見，假定气体在一圓筒內，一面是面积为 Q 的活塞，当气体膨胀时，将活塞推动了 ds，作用于活塞上的力为 PQ，因此所作的功为 $PQ\,ds = P\,dV$，故消耗在这功上的热为 $AP\,dV\left(A = \frac{1}{427}\text{卡/克米}\right)$. 当温度变化 dT 时，需热 $C_v dT$，其中 C_v 为固定体积下的气体热容量. 因此

$$dU = C_v dT + AP\,dV,$$

由于

$$dT = \frac{1}{R}(P\,dV + V\,dP),$$

故得

$$dU = \frac{C_v}{R} V dP + \frac{C_v + AR}{R} P dV = \frac{C_v}{R} V dP + \frac{C_P}{R} P\,dV.$$

因此当气体状态經过曲綫 (l)，由 (A) 变到 (B) 时，所传得的总热量为

$$U = \int_{(l)} \frac{C_v}{R} V dP + \frac{C_P}{R} P\,dV.$$

例 6. 一导体上通过的电流为 I，它上面一元素 ds 作用于与它相距 r 的磁量为 m 的一点 M 上的力，按照 Biot 与 Savat 定律，应为

$$dF = \frac{Im \sin\varphi\, ds}{r^2},$$

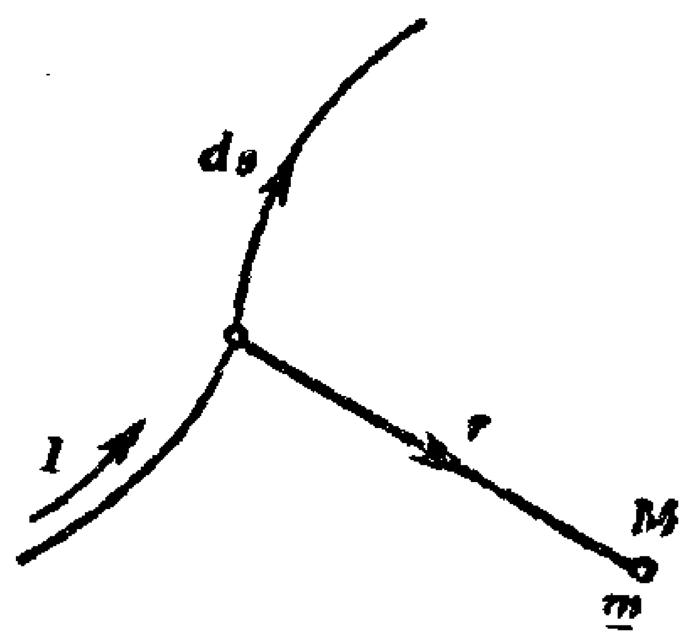


图 84

此处 $d\mathbf{s}$ 延着电流行进的方向，$\mathbf{r}$ 是連接电流元素与磁极的向量，φ 是 $d\mathbf{s}$ 与 $\mathbf{r}$ 的夾角，$d\mathbf{F}$ 的方向与 $\mathbf{r} \times d\mathbf{s}$ 一致. 因此

$$d\mathbf{F} = \frac{mI}{r^3}(\mathbf{r} \times d\mathbf{s}).$$

以 (ξ, η, ζ) 表 M 的座标，(x, y, z) 表 $d\mathbf{s}$ 起点的座标，而 $d\mathbf{s}$ 在座标軸上的投影分别为 dx, dy, dz，則得

$$F_x = mI \int_{(l)} \frac{(\eta - y)dz - (\zeta - z)dy}{r^3},$$

$$F_y = mI \int_{(l)} \frac{(\zeta - z)dx - (\xi - x)dz}{r^3},$$

$$F_z = mI\int_{(l)} \frac{(\xi - x)dy - (\eta - y)dx}{r^3}.$$

§3. 曲綫积分求面积

現在考慮平面上一区域 (σ) 的面积，我們假定它是被封閉曲綫 (l) 所包圍的，为簡单起見，假定平行于 y 軸的直綫最多只和它交于两点。y_1 表示由下向上方向第一次交得的坐标，而 y_2 表示第二次交得的坐标，并且假定其間 y 都在域 (σ) 中，并且 a, b 表示两个极端点的横座标，区域 (σ) 在 $x=a, x=b$ 之間，而这长条不能再狹。

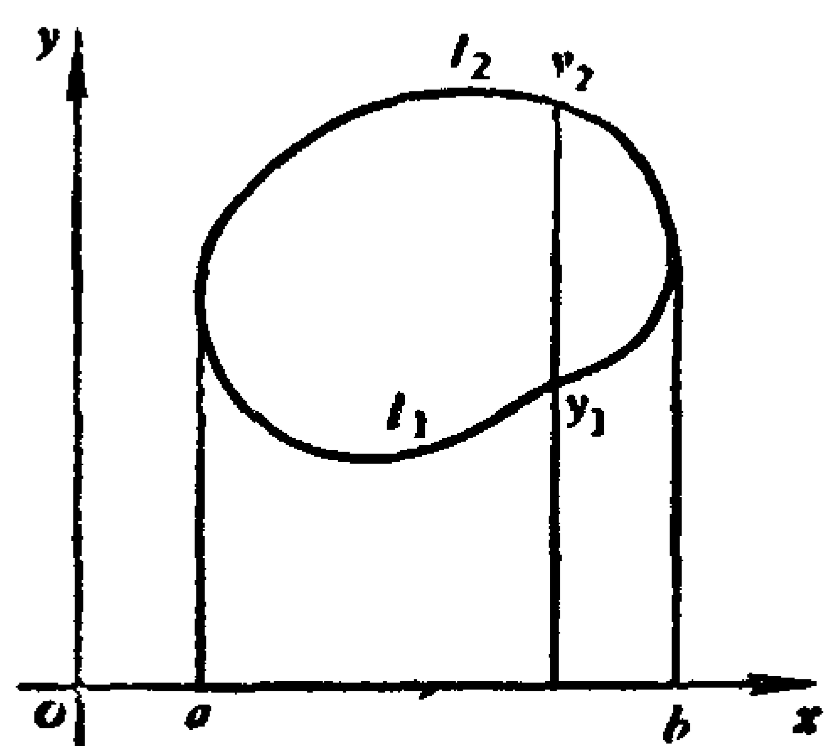


图 85

前已知道这区域的面积等于

$$\sigma = \int_a^b (y_2 - y_1)dx. \tag{1}$$

把曲綫 (l) 分为两部分 (l_1) 与 (l_2)：(l_1) 是下部，(l_2) 是上部，显然可見

$$\int_a^b y_2\, dx,$$

恰好是沿 (l_2) 的曲綫积分

$$\int_{(l_2)} y\, dx.$$

如果把它的方向改为由 b 到 a，便应当取負号，同样 $\int_a^b y_1 dx$ 是沿曲綫 (l_1) 从 a 到 b 的积分。

把 (l) 表示为循 (l_1) 由 a 到 b，再循 (l_2) 由 b 到 a，則过此曲綫的綫积分等于

$$\sigma = \int_a^b y_2\, dx - \int_a^b y_1\, dx = -\left[\int_{(l_2)b}^a y\, dx + \int_{(l_1)a}^b y\, dx\right] = -\int_{(l)} y\, dx. \tag{2}$$

这曲綫 (l) 取逆时針的方向，即如果人沿边走，左手在域內。

同法求出

$$\sigma = \int_{(l)} x\, dy. \tag{3}$$

相加得

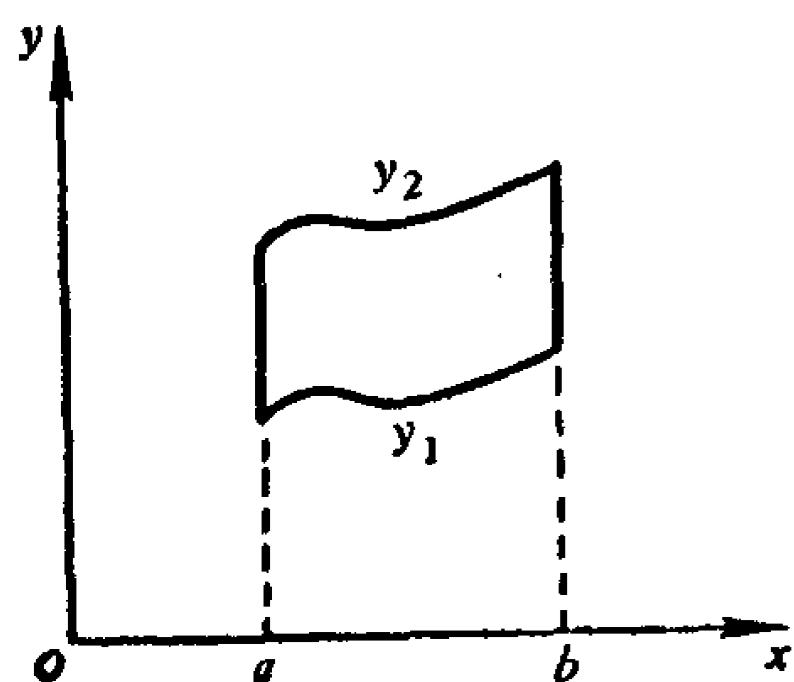


图 86

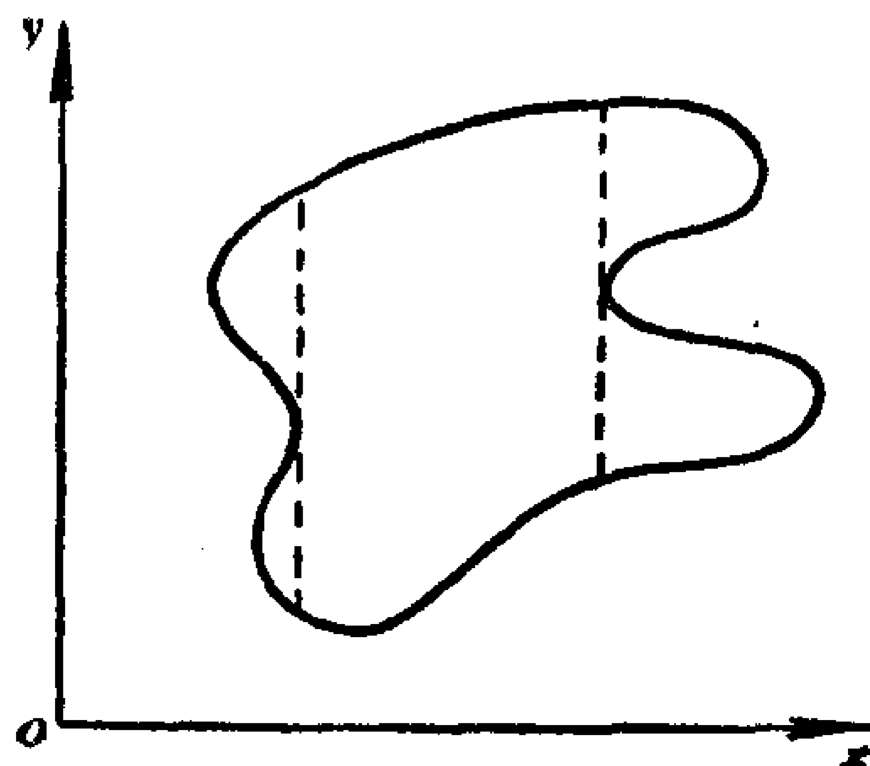


图 87

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_{(l)} x\,dy - y\,dx. \tag{4}$$

我們求出(2)式时，是用了以下的假設的，平行于 y 軸的直綫頂多与 (l) 交于两点。我們現在来減輕这一假定，先考虑以下的特殊情况，(σ) 是界于二平行于 y 軸的直綫和两曲綫 (l_1) 与 (l_2) 之間的(图 86)。重复上面的討論依然得到

$$\sigma = -\left[\int_{(l_1)} y\,dx + \int_{(l_2)} y\,dx\right].$$

在直綫 $x = a$ 与 $x = b$ 上 $dx = 0$，所以 $\int y\,dx = 0$。因此得到(2)式，其中 (l) 是先走 (l_1) 再走 b 直綫，然后 (l_2)，最后是 a 直綫。

对于有更一般的边界的区域(图 87)，我們可以引垂直于 x 軸的直綫把它分成为有限个如上所討論的图形，由于沿垂直于 x 軸的直綫的积分等于 0，因此对这些图形的线积分的和便定义了原来图形的綫积分，換言之，(2)，(3) 及 (4) 对普遍形状的界綫也正确。

例 1. 取椭圓

$$x = a\cos\theta,\quad y = b\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

則得面积

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta\cdot b\cos\theta + b\sin\theta\cdot a\sin\theta)d\theta = \pi ab.$$

例 2. 取外摆綫

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t],$$
$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t] \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

它与对应的圓弧 $x = a\cos mt$, $y = a\sin mt$ (t 由 2π 变为 0)之間的面积 D(图 88)为

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\int_{(ABC)} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{(CDA)} x\,dy - y\,dx \\ &= \frac{1}{2}a^2m(1+m)(1+2m)\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2}a^2m\int_{2\pi}^0 dt = \pi a^2m^2(2m+3). \end{aligned}$$

在証明公式(2)，(3)，(4)时，参数的变化区間是有限的，当区間是无限时，例如当 t 由 0 变为无限时，就命 $t = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$，而 θ 由 0 变为 $\frac{\pi}{2}$，再将 θ 变为 t，所以以上諸公式仍然正确。

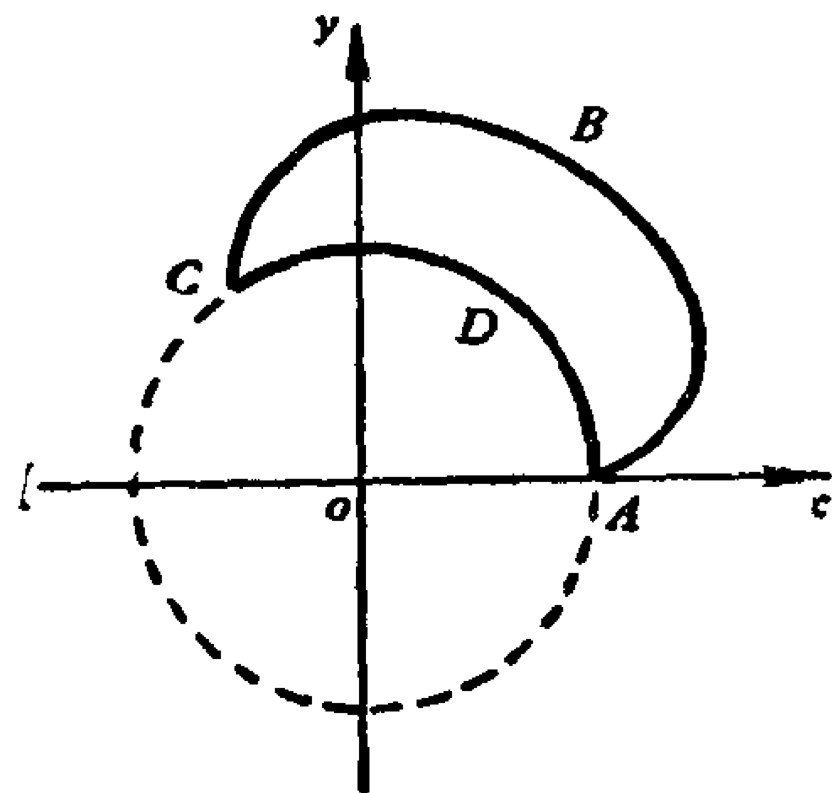


图 88

例 3. 求曲綫

$$x = \frac{3at}{1+t^3},$$

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3},\quad (t \in (0,\infty))$$

所范围的面积 D。

$$D=\frac{1}{2}\int_{(l)}x\,dy-y\,dx=\frac{9a^2}{2}\int_0^\infty\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}=\frac{3}{2}a^2.$$

§ 4. Green 公式与 Остроградский 公式

Green 公式是一个基本公式，它表达出闭曲綫积分和它所围繞着的面积分的关系。这公式也是上节公式的推广。

先从計算积分

$$\iint_{(\sigma)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy$$

談起．为簡单起見，我們还是先假定平行于 y 軸的直綫至多与 (σ) 的边界 (l) 交于二点，如此，則得

$$\iint_{(\sigma)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy=\int_a^b(P(x,y_2)-P(x,y_1))dx.$$

用与上节相同的方法知道

$$\iint_{(\sigma)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy=-\int_{(l)}P(x,y)dx,$$

这儿 (l) 是取逆时針方向。

同样

$$\iint_{(\sigma)}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy=\int_{(l)}Q(x,y)dy.$$

由此得 Green 公式

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{(l)}P\,dx+Q\,dy. \tag{1}$$

如果取 $Q=x$, $P=-y$，卽得上节的公式(4)．与上节一样，我們可以証明，这一公式对更普遍的区域也适用。

卽使于非連通的，或非单連通的区域都对，但須注意边界的走向，我們經常假定所积分的区域在边界的左边(图89)。

由于

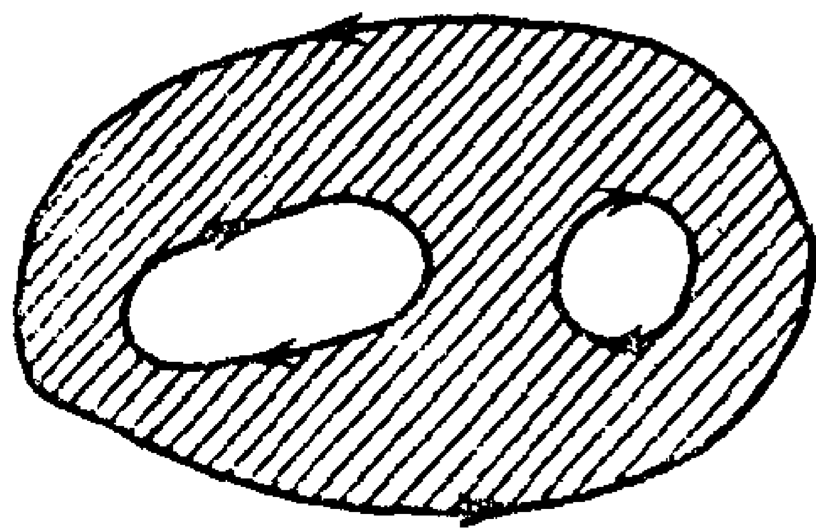


图 89

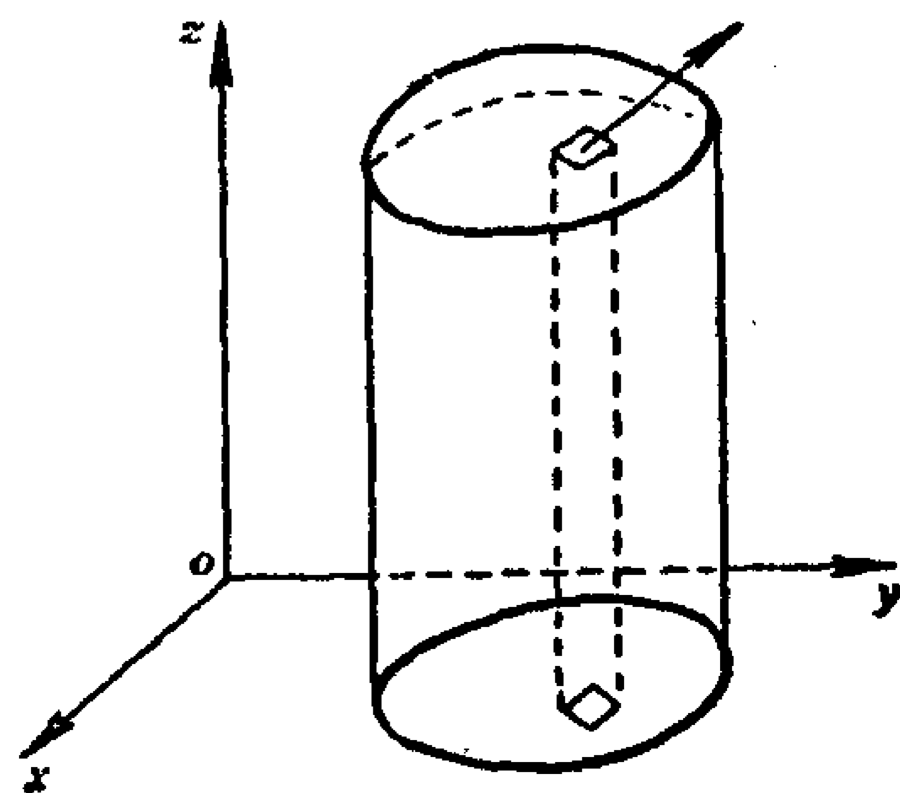


图 90

$$dx = ds\cos(t, X), \quad dy = ds\cos(t, Y),$$

其中 (t, X) 表示在該点切綫方向 t 与 X 軸的夾角,命 n 代表法綫方向,由 $(t, X) = \pi - (n, Y)$ 与 $(t, Y) = (n, X)$, 所以

$$dx = -ds\cos(n, Y), \quad dy = ds\cos(n, X),$$

因而在 (1) 式中以 $-Q$ 代 P, P 代 Q, 則得

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{(l)} (P\cos(n, X) + Q\cos(n, Y))ds. \tag{2}$$

这是 Green 公式的又一形式.

这是"面"与"綫"的关系,我們再考虑"体"与"面"的关系,即就是 Остроградский 公式,它的形式是

$$\iiint_{(v)}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\, dy\, dz = \iint_{(s)}(P\cos(n, X) + Q\cos(n, Y) + R\cos(n, Z))ds, \tag{3}$$

这儿 (s) 是体 (v) 的边界, ds 是(s)上的面积元素.

証明的方法也是先考虑平行于 z 軸的直綫只交 (v) 于两点的情况. 命 σ_{xy} 是这个体在 xy 平面上的射影(图 90). 如此,則

$$\iiint_{(v)}\frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_{(\sigma_{xy})} d\sigma_{xy}\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dz = \iint_{(\sigma_{xy})} (R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1))d\sigma_{xy}.$$

引进(s)的法綫方向 (n). 在曲面上部这方向是由容积向外的方向,与 z 軸成銳角;但下部的法綫方向与 z 軸成鈍角,由投影关系可知在上部曲面

$$d\sigma_{xy} = \cos(n, z)ds.$$

而在下部曲面,則

$$d\sigma_{xy} = -\cos(n, z)ds.$$

由此得

$$\iiint_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dv = \iint_{(s_2)} R(x, y, z)\cos(n, z)ds + \iint_{(s_1)} R(x, y, z)\cos(n, z)ds = \iint_{(s)} R(x, y, z)\cos(n, z)ds.$$

由此,不难証出公式 (3) 来.

我們可以和 Green 公式一样来減弱关于边界面 (s) 的条件, 原因是: (1) 在母綫平行于 z 軸的柱体上对 z 积分等于 0; (2) 其他的图形可用添加柱面法隔成适合于原来条件的图形, 若在多个曲面为界的情况下, 必須注意, 法綫的指向是在求积分的区域的外面.

何謂外面,有时并不明确. 有这样的情况存在,一法綫指向外面,把这法綫連續移动,走了一些路回到原来的位置后,这法綫指向另一面了,有这样性质的图形,称为单側曲面.

而我們一般研究的将是双側曲面. 单側曲面的著名例子是 Möbius 带.

把一矩形紙条 $ABCD$ 的对边摔轉粘上(图 91, 92),这样的曲面就分不出两側来了.

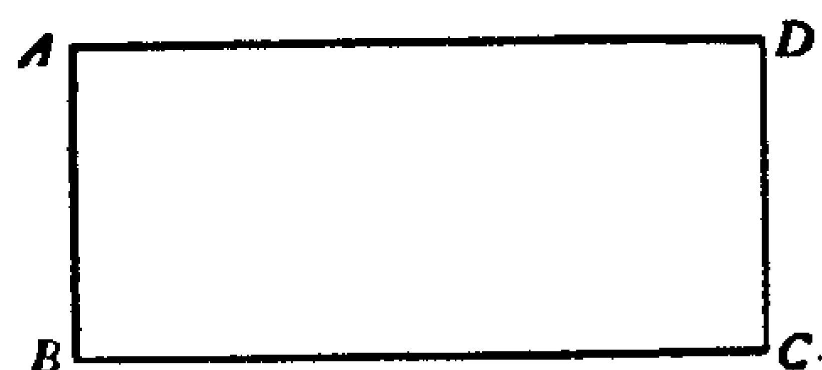


图 91

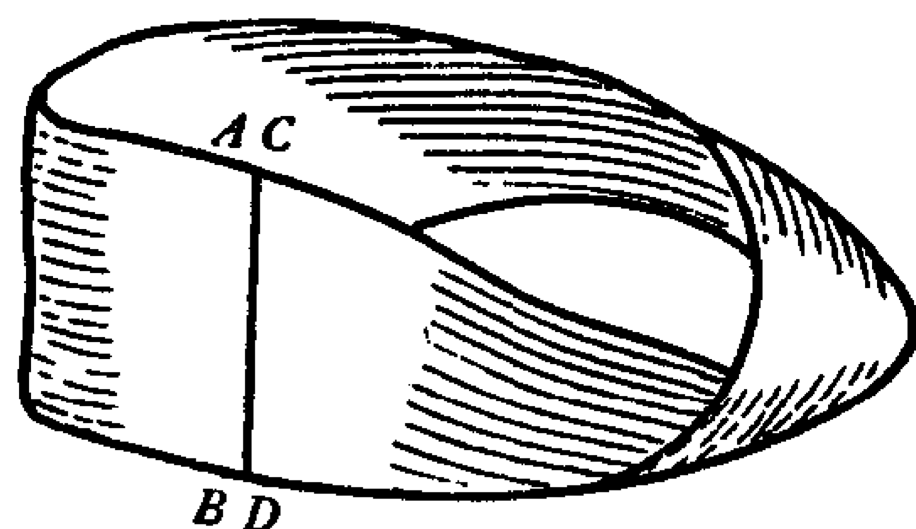


图 92

§5. Stokes 公式

Green 公式的另一推广是把平面推广为曲面,卽曲面 S (非封閉面)以曲綫 (l) 为边界的情況.

假定 S 在 xy 平面上的投影是 σ_{xy}, 并假定通过 σ_{xy} 上的一点平行于 z 軸的直綫仅与 S 有一个交点, (λ) 是 (σ_{xy}) 的边界綫,也就是 (l) 在 xy 平面上的投影. S 的法綫方向是取与 z 軸成銳角的,如此則得出

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos(n, Z) = -\cos(n, X), \quad \frac{\partial z}{\partial y}\cos(n, Z) = -\cos(n, Y),$$

由此

$$d\sigma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dS = \cos(n, Z)dS.$$

假定 $P(x, y, z)$ 是在曲面 S 附近所定义的連續函数, 并有一級連續偏微商, 先考虑积分

$$\int_{(l)} P(x, y, z)dx.$$

曲綫 (l) 在 S 上,利用曲面方程 $z=f(x, y)$, 在积分号下, 用 $f(x, y)$ 代 z, (λ) 上变点 x, y 的坐标也就是 (l) 上对应点的这两个坐标,所以 (l) 积分可以用 (λ) 积分来代替,卽

$$\int_{(l)} P(x, y, z)dx = \int_{(\lambda)} P(x, y, f(x, y))dx.$$

在右边用 Green 公式, $P=P(x, y, f(x, y))$, $Q=0$, 則得

$$\int_{(\lambda)} P(x, y, f(x, y))dx = -\iint_{(\sigma_{xy})}\frac{\partial}{\partial y}(P(x, y, f(x, y)))d\sigma_{xy}$$

$$= -\iint_{(\sigma_{xy})}\left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)d\sigma_{xy}.$$

由曲面 S 的积分元素 ds 与 $d\sigma_{xy}$ 的关系可知

$$\int_{(l)} P(x, y, z)dx = -\iint_{(S)}\left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)\cos(n, Z)dS$$

$$= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos(n, Y) - \frac{\partial P}{\partial y} \cos(n, Z) \right) dS. \tag{1}$$

假定 Q 与 R 是另外两个函数，同样可以得以下的两个公式

$$\int_{(l)} Q(x, y, z) dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos(n, Z) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(n, X) \right) dS,$$

$$\int_{(l)} R(x, y, z) dz = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos(n, X) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(n, Y) \right) dS.$$

三式相加，得

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, X) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, Y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, Z) \right] dS, \tag{2}$$

这是 Green 公式的推广，因为在 xy 平面上 $dz = 0$，$\cos(n, Z) = 1$，$\cos(n, X) = 0$，$\cos(n, Y) = 0$，所以得出

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma.$$

前所假定的：平行于 z 軸的直綫与 (S) 只交一点是可以减弱的．如果不这样，就用輔助曲綫把 S 分成几部分，使每一部分都满足上述的条件．而每一部分都可用 (2) 式，然后把結果总加起来．因为輔助界綫在相反方向各算了一次，而且符号相反，所以 (2) 是在普遍情况下也是成立的．而須要注意的是对于 (l) 及法綫方向 (n) 要合乎以下的条件：依法綫方向直立，沿 (l) 走时，曲面 S 在我們的左边．

公式 (2) 也可写成为

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

这就是 Stokes 公式．

例 1．若一坚硬的曲面在各方面承受的压力都相等，则必平衡．

取曲面元素为 dS．P 为单位面积的压力，它为常量，则沿 dS 法綫方向作用在元素 dS 上的力在座标軸上的投影的长度分别为

$$-P\cos\lambda\,dS, \quad -P\cos\mu\,dS, \quad -P\cos\nu\,dS,$$

此处由于法綫方向与压力方向相反，故取負号．因此合力的三个分量为

$$X = -P\iint_{(S)} \cos\lambda\,dS, \quad Y = -P\iint_{(S)} \cos\mu\,dS, \quad Z = -P\iint_{(S)} \cos\nu\,dS.$$

在 Остроградский 公式中取 $P = 1$，$Q = R = 0$，则得

$$X = 0.$$

同样可得

$$Y = Z = 0.$$

作用在元素 dS 上的压力对原点的力矩的三个分量为

$$P(z\cos\mu - y\cos\nu)dS, \quad P(x\cos\nu - z\cos\lambda)dS, \quad P(y\cos\lambda - x\cos\mu)dS.$$

因此压力对原点的力矩的三个分量为

$$M_x = P\iint\limits_{(S)}(z\cos\mu - y\cos\nu)dS,$$

$$M_y = P\iint\limits_{(S)}(x\cos\nu - z\cos\lambda)dS,$$

$$M_z = P\iint\limits_{(S)}(y\cos\lambda - x\cos\mu)dS.$$

在 Остроградский 公式中取 $P = 0$, $Q = Pz$, $R = -Py$, 则得

$$M_x = 0.$$

同样可得

$$M_y = M_z = 0.$$

因此曲面是平衡的.

例 2. 取 xy 平面为液体的表面, z 軸向下, 液体給浸入其內的一小平面块物体的压力是向着这块物体的法綫的. 現在設浸入密度均匀,体积为 (V), 表面为 (S) 的物体,又設液体的比重为 ρ, 設元素 dS 浸入的深度为 z, 则这元素承受的压力为

$$\rho z\, dS.$$

它在座标軸上的分量为

$$-\rho z\cos\lambda\, dS, \quad -\rho z\cos\mu\, dS, \quad -\rho z\cos\nu\, dS.$$

故压力的三个分量各为

$$X = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\lambda\, dS, \quad Y = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\mu\, dS, \quad Z = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\nu\, dS.$$

由 Остроградский 公式得

$$X = Y = 0,$$

$$Z = -\rho\iiint\limits_{(V)} dV = -\rho V.$$

因此压力朝着垂直向上的方向,而等于物体排出的液体的重量.

現在考虑这些元素力,对物体重心 $C(\xi, \eta, \zeta)$ 的力矩,它的三个分量各为

$$\rho z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]dS,$$

$$\rho z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]dS,$$

$$\rho z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]dS.$$

故

$$M_x = \rho\iint\limits_{(S)} z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]dS,$$

$$M_x = \rho\iint\limits_{(S)} z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]dS,$$

$$M_x = \rho \iint_{(S)} z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]dS.$$

由 Остроградский 公式可知，

$$M_x = \rho \iiint_{(v)} \left[\frac{\partial z(z-\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial z(y-\eta)}{\partial z}\right] dV = \rho \iiint_{(v)} (\eta - y) dV$$

$$= \rho \left[\eta V - \iiint_{(v)} y\, dV\right] = 0.$$

类似可得

$$M_y = M_z = 0.$$

故得著名的阿基米德原理，液体对浸入液体的物体作用一力，該力等于立体排出的液体的重量，这一力作用于立体的重心且垂直向上。

例 3. 取 (l) 为圓周 $x^2+y^2=a^2$, $z=0$，依逆时針而行，曲面为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z>0)$ 的上側，$P=x^2y^3$, $Q=1$, $R=z$. 試驗証 Stokes 公式.

一方面

$$\int_{(l)} x^2y^3\,dx + dy + z\,dz = \int_{(l)} x^2y^3\,dx = -a^6\int_0^{2\pi} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{8}a^6,$$

另一方面

$$\iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx = -3\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^2y^2\,dx\,dy = -\frac{\pi}{8}a^6,$$

結果相同。

例 4. 取 (l) 是圓周

$$x = a\cos^2 t,\quad y = a\sqrt{2}\sin t\cos t,\quad z = a\sin^2 t \quad (0\leqslant t\leqslant \pi).$$

而 S 是它范围的圓，$P=y$, $Q=z$, $R=x$.

实际这一圓就是平面 $x+z=a$ 与球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 相交的部分，其半径为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

一方面

$$\int_{(l)} y\,dx + z\,dy + x\,dz = a^2\int_0^{\pi}(-\sqrt{2}\sin^2 t + 2\cos^3 t\sin t)dt = \frac{-1}{2}\sqrt{2}\,\pi a^2,$$

另一方面

$$-\iint_{(S)} dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx$$

等于这个圓在各个座标平面的投影之和，但取負号. 因此等于

$$-2\cdot\pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi a^2.$$

結果一致。

§6. 与途径无关的曲綫积分

在所謂与途径无关的曲綫积分乃指：在某一域 (σ) 內取两点 A, B, 由 A 到 B 在 (σ) 內作一曲綫 (l), 如果积分

$$\int_{(l)}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$$

仅与起点 A 及終点 B 有关，而与怎样取曲綫无关，这样的情况，称为与途径无关的綫积分.

十分显然，在討論这問題之前，我們必須弄清以下几件对象：首先 (σ) 的性質，其次怎样的曲綫 (l), 最后，函数 P 与 Q 应当有些什么限制.

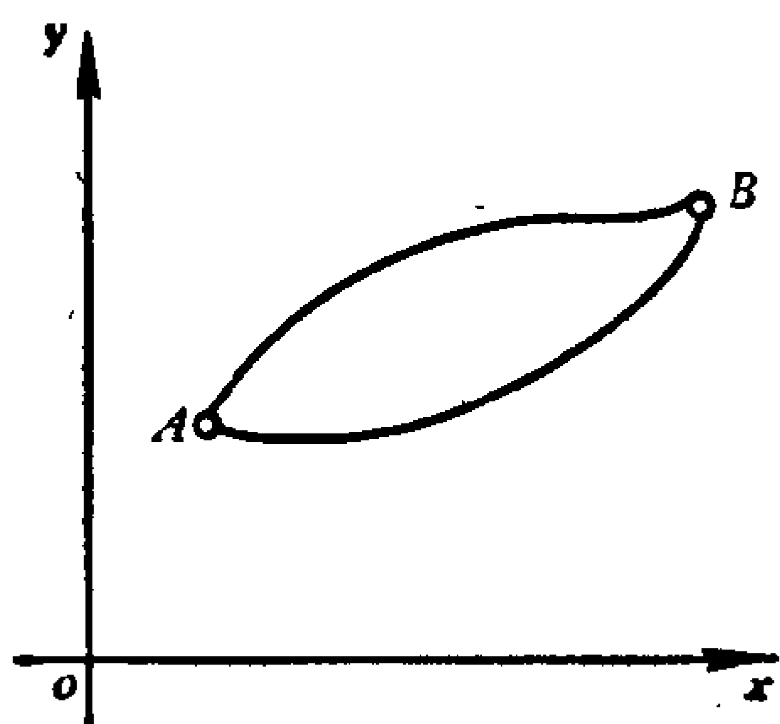


图 93

我們先討論平面上的情况，域 (σ) 是单連通域，即如果在 σ 內有两个途径由 A 到 B, 則这两个途径所围繞的部分也在 (σ) 中.

曲綫 (l) 是指可度量的曲綫，即有参变数表示法，$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 此处 φ, ψ 有連續微商.

并将假定 P, Q 在 (σ) 內是連續的，且是有連續偏微商的函数，我們将証明

$$\int_{(A)}^{(B)}P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy \tag{1}$$

与途径无关的必要且充分条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

这一条件被称为确切微分条件.

首先証明，(1) 与途径无关的必要且充分条件是在 (σ) 中作任一封閉曲綫 (l), 則

$$\int_{(l)}P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy=0.$$

如果由两条途径 (l_1) 与 (l_2) 都从 A 到 B, 則有

$$\int_{(l_1)}P\,dx+Q\,dy=\int_{(l_2)}P\,dx+Q\,dy,$$

由此可得

$$\int_{(l_1)}P\,dx+Q\,dy-\int_{(l_2)}P\,dx+Q\,dy=0.$$

命 (l) 是一这样的一条閉綫，先沿 (l_1) 从 A 到 B, 再沿 (l_2) 从 B 到 A, 如此則得

$$\int_{(l)}P\,dx+Q\,dy=0.$$

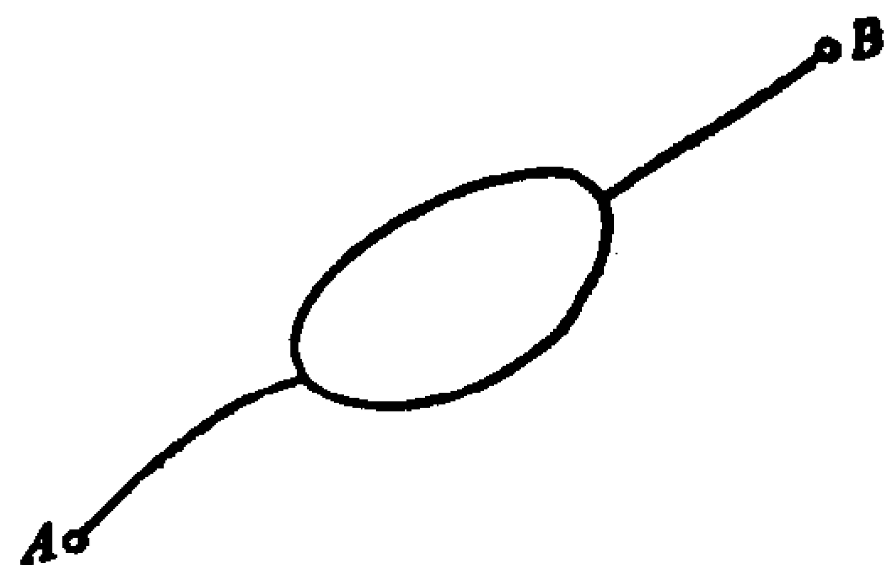


图 94

由此可知，沿任何封閉綫 (l) 的积分应当等于 0.

反之，也容易証明：如果沿 (σ) 內任何封閉綫 (l) 的积分等于 0, 則綫积分 (1) 仅与

端点有关.

现在再証明：一綫积分沿任何在 (σ) 內的閉曲綫等于 0 的必要且充分条件是 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

由 Green 公式

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma,$$

所以沿封閉綫积分为 0 的条件又等价于

$$\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0$$

(对任意域 σ). 如果

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$$

及假定 $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ 是連續的,这样,我們可以找到一点 (x_0, y_0)、在这点 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$. 假定在这点 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$,我們可以作一以 (x_0, y_0) 为中心的小圓 (σ_0),使在 (σ_0) 中,$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geqslant c(>0)$. 如此,則

$$\iint_{(\sigma_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma \geqslant c\sigma_0.$$

这是与假定相违背的,所以,如果积分与途径无关,則一定有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{2}$$

反过来,結論更是显然.

如果条件 (2) 满足了,就有

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy = U(x, y). \tag{3}$$

保持 y 不变,作为 x 的函数,則

$$U(x+\Delta x, y) - U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx + Q\,dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy.$$

由于积分是和途径无关的,所以

$$U(x+\Delta x, y) - U(x, y) = \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx + Q\,dy = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)dx.$$

卽得

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = P(x, y). \tag{4}$$

同法,可証

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x, y). \tag{5}$$

所以

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=P\,dx+Q\,dy.$$

这說明了,满足了条件(2),則 $P\,dx+Q\,dy$ 是一个函数 $U(x, y)$ 的全微分. 不难証明 $P\,dx+Q\,dy$ 的积分的一般形式是 $U(x, y)+c$. 其証明是,如果

$$dU=dU_1=P\,dx+Q\,dy,$$

則 $d(U_1-U)=0$. 但如果一函数的微分恆等于 0,則这函数对所有的自变数的偏微商都等于 0. 所以这函数是常数. 当然

$$\int_{(A)}^{(B)}P\,dx+Q\,dy=\int_{(A)}^{(B)}dU=U(B)-U(A).$$

反之,如果有一函数 U_1, 使

$$dU_1=P\,dx+Q\,dy,$$

則

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y}=Q.$$

显然

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

所以使表达式 $P\,dx+Q\,dy$ 是某一函数 U 的全微分的必要且充分条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

如此,則 U 由公式

$$U(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}P\,dx+Q\,dy+C$$

給出.

§7. 多 連 通 域

如果 (σ) 幷不适合上节的条件,由上节的推理可見,我們不能利用 Green 公式,因为閉曲綫所范围的域可能不在 (σ) 中.

关于 (σ) 的条件也可以述之为,在这区域 (σ) 上画出的任何一个封閉曲綫,可以連續地收縮成一点而不出这区域. 換言之,就是这个区域沒有洞, 如图 95 阴影所指的区域便

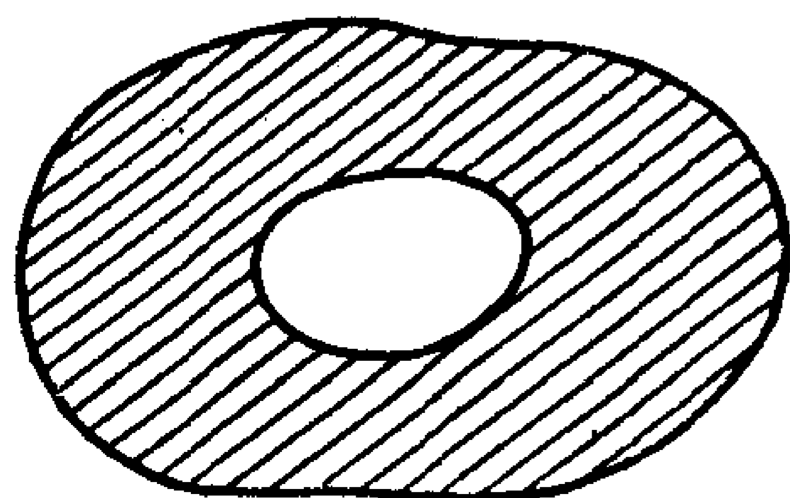


图 95

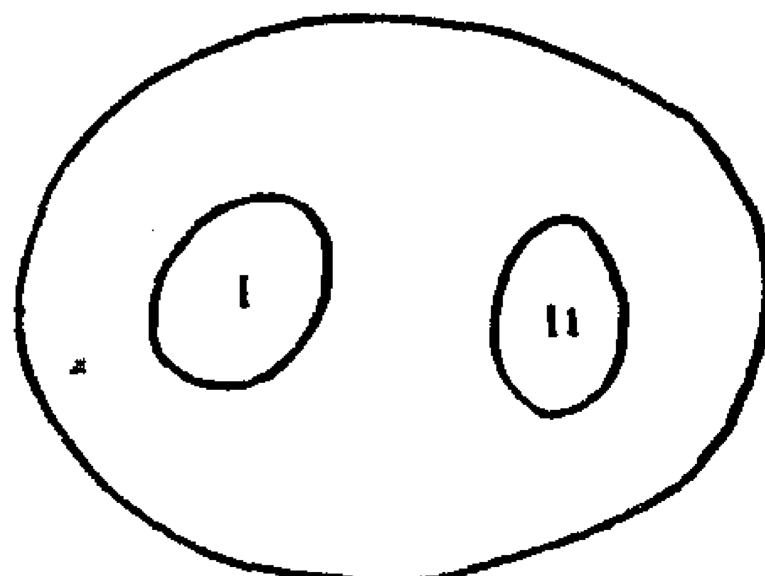


图 96

是有洞的区域，为簡单起見，現在研究一个有两个洞的区域 (σ)，如图 96，即在一个单連通区域中挖去两块 (I) 与 (II) 的情况. 假定在这个区域 (σ) 上也滿足确切微分条件，在这样的区域上取一封閉曲綫 (l_1). 如果其內沒有洞，則 Green 公式还是适用的，即它的积分等于 0. 現在取另一封閉曲綫 (l_2)，其中包有 (I)，則 Green 公式不适用. 所以幷不能得出結論，沿 (l_2) 的积分等于 0，幷且以后将看到的确有时非 0.

但是如果 (l_1) 与 (l_2) 都是繞包有 (I)，而不包有 (II) 的閉曲綫(图 97)，則我們可以用輔助綫段 $\overline{ab}$，把这两曲綫連在一起，如此我們得到一个閉曲綫，先从 b 点起沿 (l_1) 走(正向)一圈，再由 b 到 a，再沿 (l_2) 走(反向)一圈，再由 a 到 b，在这样的区域上 Green 公式可用，所以

$$\int_{(l_1)} + \int_{(ba)} - \int_{(l_2)} + \int_{(ab)} = 0,$$

这儿沿 (a, b) 与沿 (b, a) 的积分是取方向相反的，可以抵消掉的，因而得出

$$\int_{(l_1)} = \int_{(l_2)}.$$

換言之，如果 (l_1) 与 (l_2) 都仅包有一洞 (I)，則其积分数值相等.

所以，洞 (I) 对应于一个确定的常数 ω_1，它等于沿任何繞洞 (I) 而不繞洞 (II)，在 (σ) 內的封閉曲綫的积分，称 ω_1 为循环常数.

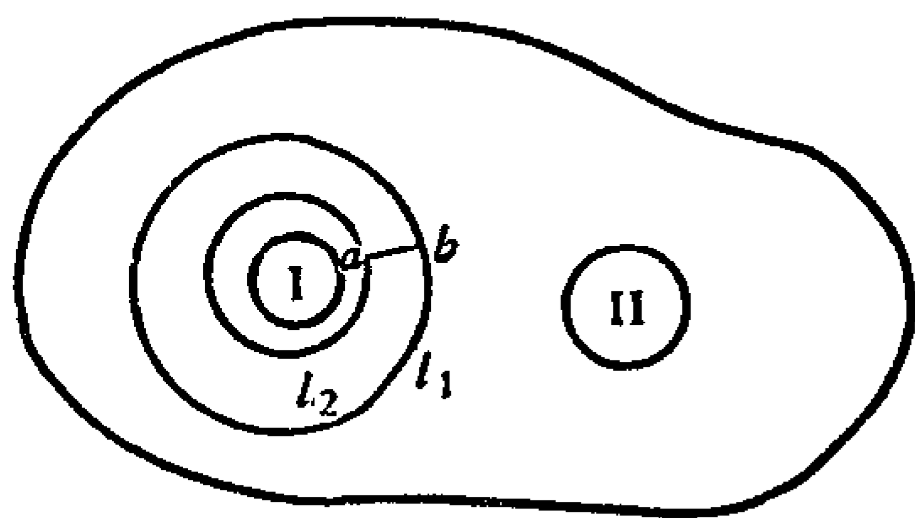


图 97

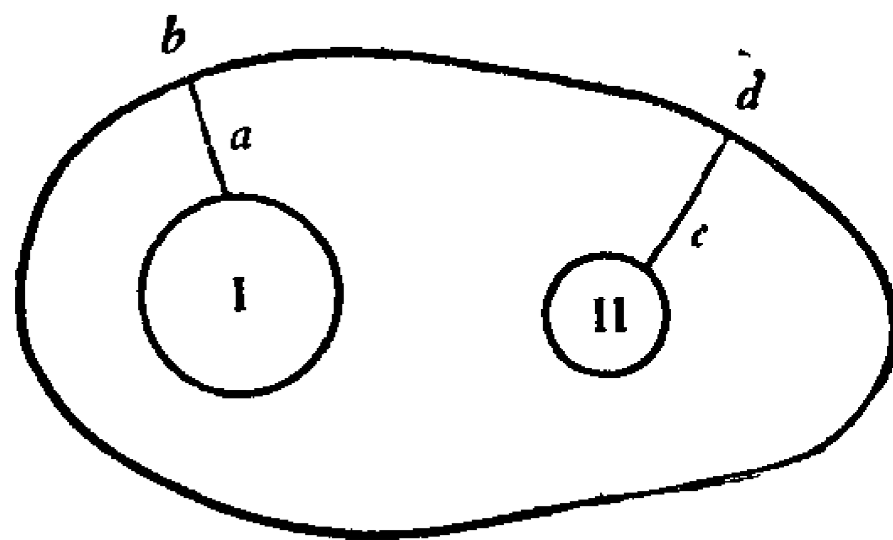


图 98

同理，洞 (II) 也对应于另一常数 ω_2.

如图 98，我們作两割綫 (a, b) 与 (c, d)，如此所得出的新区域是沒有洞的，因而

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy.$$

但是在割綫 (a, b) 的相对两側这函数相差一个数值 ω_1，而在 (c, d) 的两側函数相差一个数值 ω_2，如果去掉割綫，回到原来的区域，則 $U(x, y)$ 不是一单值函数，而是一多值函数. 繞 (I) 一周多加一个 ω_1，繞 (II) 一周多加一个 ω_2，所以函数含有不定項

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

这儿 m_1, m_2 是整数.

以上的討論当然也适合于多洞的情况，这样的区域称为多連通域. 洞的数目加 1 称为連通数，例如，无洞域的連通数等于 1. $\omega_1, \omega_2, \cdots$ 称为周期.

例. 取定义于两个以原点为中心的同心圓之間的区域 (σ) 上的函数

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

命

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

則得

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

取 (l) 为以原点为中心，a 为半径的圓周 $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$，則

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(l)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

因此在所給区域 (σ) 上有一个洞，循环常数为 2π，注意洞的半径可以是一个任意小的数。事实上，在 $(0, 0)$ 这一点，P, Q 都是不定的。

§ 8. 空間与路径无关的曲綫积分

我們現在考虑

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{1}$$

也是先假定在一单連通区域 (v)，而 (l) 是其中的一条封閉曲綫。 現在求出对任意 (l)，这积分等于 0 的条件。

前用 Green 定理，現在用 Stokes 定理，可得充分且必要的条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{2}$$

如果这些条件滿足了，这定义出一个函数 $U(x, y, z)$，

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

完全与以前一样，推得

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

而

$$dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

及

$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(B) - U(A).$$

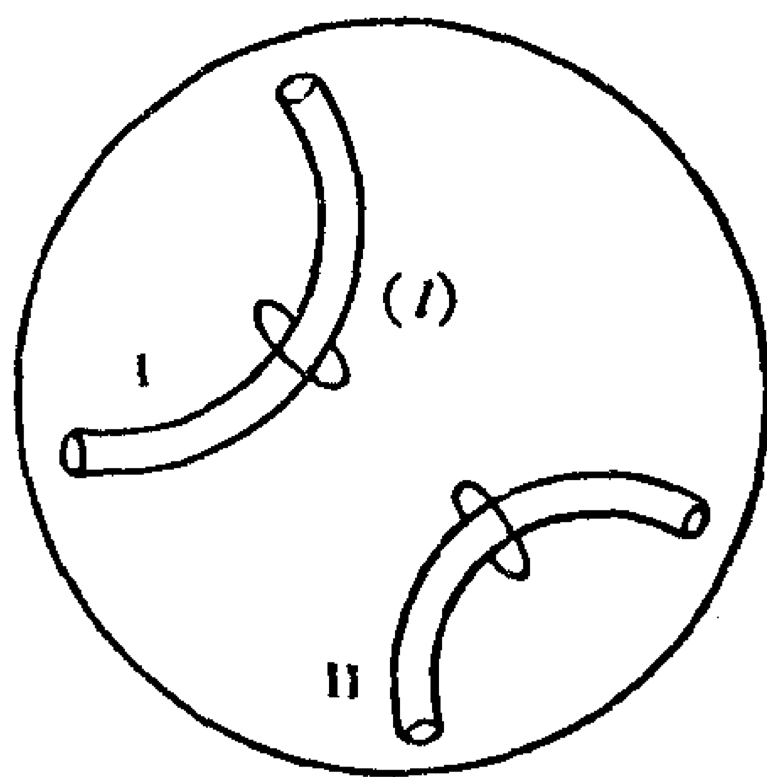


图 99

关于空間多連通域有以下的說明.

首先两个同心球之間的部分是单連通而不是多連通，一个环是多連通而不是单連通.

我們考虑一个区域 (v)，它由一个球的内部組成，其中挖去两个管子 (I) 与 (II)，这两个管穿通球面，如图 99 所示。若取一繞管 (I) 的封閉曲綫 (l_1)，則不可能在 (v) 內連續

地收縮成为一点. 一般說来,沿繞管子 (I) 的任意封閉的曲綫的积分不等于 0, 命之为 ω_1, 沿繞管子 (II)的任意封閉的曲綫的积分命之为 ω_2; 如此則得 $U(x, y, z)$ 是一个多值函数,它們的值的差等于

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

此处 m_1, m_2 是整数.

§ 9. 流体的稳定流动

我們現在假定流体是均匀的不可压縮的,并且假定它的流动是平面性的,也就是有一平面,其上每一点的流向都在这平面上,而且在垂直于这平面的直綫上, 每一点的流速和流向都是相同的. 这样,我們就可以把这問題看做一个平面問題. 我們又假定是沒有时間因素的,即在一点的流速流向仅与此点有关,而与时間无关.

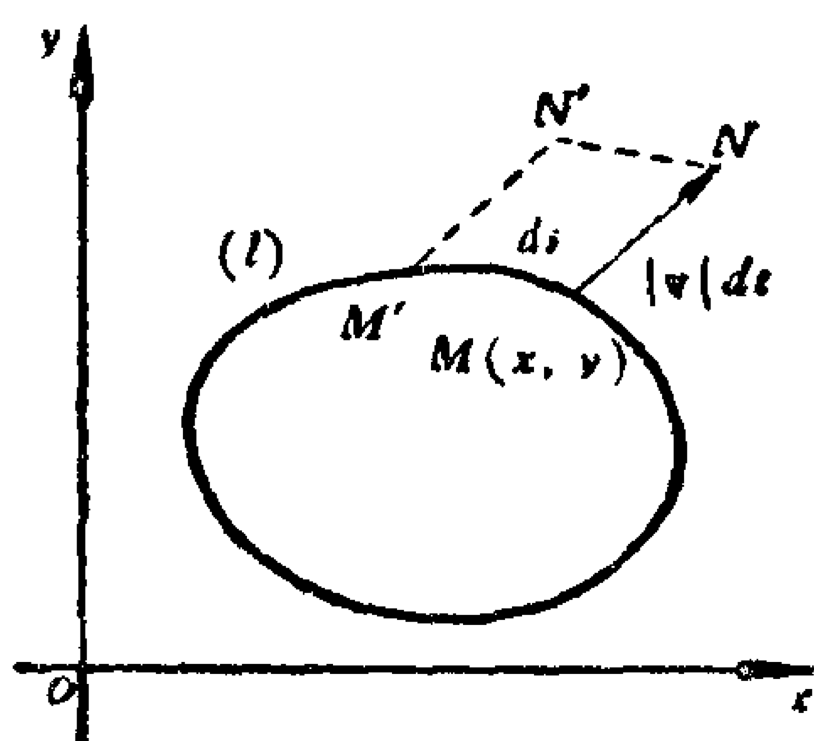


图 100

取这平面为 xy 平面,在一点 $M(x, y)$ 的流体質点的速度矢量是 $\mathbf{v} = (u,v)$, 把边界綫 (l) 分为若干小段, 命 $MM' = ds$ 为其中的一段. 由于我們取得 ds 很小,所以可以假定它在 ds 上每一点的流速是近似的, 在非常短的时間中, ds 上所有的点在向量 $\mathbf{v}$ 的方向移动一段 $|\mathbf{v}|dt$. 而达到的位置是 NN', 平行四边形 $MNN'M'$ 的面积等于

$$|\mathbf{v}|dt \cdot ds\cos(\mathbf{v}, \mathbf{n}), \tag{1}$$

这儿 $\mathbf{n}$ 代表 (l) 的外向法綫方向,用 $\mathbf{s}$ 記曲綫 (l) 逆时針方向的切綫方向,就有

$$(\mathbf{n}, x) = (\mathbf{s}, y); \quad (\mathbf{n}, y) = \pi - (\mathbf{s}, x)$$

(所用的符号 ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) 是指由矢量 $\mathbf{a}$ 到矢量 $\mathbf{b}$ 的夾角),所以

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \cos(\mathbf{s}, y), \quad \cos(\mathbf{n}, y) = -\cos(\mathbf{s}, x).$$

从余弦和角公式得

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{v}, \mathbf{n}) &= \cos(\mathbf{v}, x)\cos(\mathbf{n}, x) + \cos(\mathbf{v}, y)\cos(\mathbf{n}, y) \\ &= \cos(\mathbf{v}, x)\cos(\mathbf{s}, y) - \cos(\mathbf{v}, y)\cos(\mathbf{s}, x),\end{aligned}$$

并且注意

$$|\mathbf{v}|\cos(\mathbf{v}, x) = u, \quad |\mathbf{v}|\cos(\mathbf{v}, y) = v$$

是速度矢量在 x, y 軸上的投影,由 (1) 可知

$$MNN'M' \text{的面积} = |\mathbf{v}|ds\cos(\mathbf{v}, \mathbf{n})dt$$

$$= |\mathbf{v}|(\cos(\mathbf{v}, x)\cos(\mathbf{s}, y) - \cos(\mathbf{v}, y)\cos(\mathbf{s}, x))ds\,dt$$
$$= (u\cos(\mathbf{s}, y)ds - v\cos(\mathbf{s}, x)ds)dt$$
$$= (-v\,dx + u\,dy)dt.$$

如果 $(\mathbf{v}.\ \mathbf{n})$ 是鈍角,面积 $MNN'M'$ 是負的,这便代表流入曲綫 (l) 的情形. 在时間 dt 內,流过界綫 (l) 的全部流量是

$$\sum(-v\,dx + u\,dy)dt \to \left(\int_{(l)} -v\,dx + u\,dy\right)dt.$$

在单位时間中的总量等于

$$\int_{(l)}(-v\,dx + u\,dy),$$

式中 (l) 是封閉的,而且沿逆时針方向求积分. 当流向沿外法綫方向时,流量为正: 反向时,流量为負.

如果界綫 (l) 內沒有泉源,也沒有滲井(即 (l) 內不会流出水量或減少水量),则得

$$\int_{(l)}(-v\,dx + u\,dy) = 0.$$

因此,在一个区域 (σ) 內,既无泉源又无滲井,则对其中任一閉曲綫 (l),常有

$$\int_{(l)} -v\,dx + u\,dy = 0. \tag{2}$$

由确切微分的条件可知,

$$\frac{\partial(-v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

这是不可压縮流的特征. 表达式

$$-v\,dx + u\,dy$$

也应是一个函数 $\psi(M)$ 的全微分,且

$$\psi(B) - \psi(A) = \int_A^B(-v\,dx + u\,dy).$$

这个函数 $\psi(M)$ 叫做流函数,它的物理意义是: 单位时間沿一曲綫由 A 到 B 的流量,这是与曲綫无关的.

如果有一个泉源存在,则除去这一洞外,以上的条件依然适合. 积分繞洞一周便是这泉源放出的流量 $q > 0$, 因而 $\psi(M)$ 是多值的. 有滲井的情况也是一样,仅須注意滲井吸入的流量 $q < 0$.

除积分 (2) 以外,我們还考慮积分

$$\int_{(l)} u\,dx + v\,dy.$$

这个量称为沿界綫 (l) 的速度环流. 假設沿任何封閉曲綫速度环流都等于 0, 这表示沒

有涡流的流动. 在这样的情况下，有函数 $\varphi(M)$ 存在，使

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u\,dx + v\,dy,$$

而

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

由函数 $\varphi(x, y)$ 可求出速度的支量，因此这函数称为速度势，如果有涡旋中心，则 φ 不是单值的. 以上的积分表示旋涡的强度.

把流函数与速度势函数的关系合拼起来，

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{3}$$

这方程称为 Cauchy-Riemann 方程.

由这方程立刻可以看出

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0,$$

所以速度势函数适合于 Laplace 方程.

第十七章　純量場与矢量場

§1. 定　义

在空間或空間的某一区域中的每一点 (x, y, z) 都定义的函数 $\varphi(x、y、z)$ 称为該点的純量,整个儿定义一个純量場.

例如,每一点有一定的溫度,所以溫度就定义一个純量場；电場中每一点有一定的电位,因此,电位場也是一个純量場;地图上每一点都有它的高度,因此,高度便定义一个平面上的純量場.

实質上,純量場并不是什么新东西,而是三个(或两个)变数的函数而巳.

如果不特別声明,我們常假定函数 φ 是有連續偏微商的,并且假定沒有使三个偏微商同时等于 0 的点(如有則称为奇点). 由方程

$$\varphi(x, y, z)=c \quad (c \text{ 常数}) \tag{1}$$

所确定的曲面称为等量面(等温面,等电位面,等高綫等都是例子). 显然,在所考察的区域內的每一点,有一个而且仅有一个等量面通过,也就是 $\varphi(x, y, z)$ 是点 (x, y, z) 的单值函数. 因此等量面与另一等量面是无交点的.

若在空間或空間的某一区域中的每一点都定义一矢量,則这些矢量的总合定义一矢量場,也就是依賴于 x, y, z 的矢量函数

$$\mathbf{R}(x, y, z)=(X(x, y, z),\quad Y(x, y, z),\quad Z(x, y, z)). \tag{2}$$

如果不另外声明,我們假定 X, Y, Z 都是有連續偏微商的. 有时,以 $\mathbf{r}$ 表 (x, y, z), 則得矢量 $\mathbf{r}$ 为变数的矢量函数,而 $\mathbf{R}(\mathbf{r})=\mathbf{R}(x, y, z)$.

通过一点的等量面的法綫方向是

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \tag{3}$$

这矢量称为純量場 $\varphi(x, y, z)$ 在該点的梯度,以

$$\operatorname{grad} \varphi \quad \text{或} \quad \operatorname{del} \varphi$$

表之. 因此,从一个純量場 $\varphi(x, y, z)$ 可以作出一个矢量場 $\operatorname{grad} \varphi$ 来.

反之,并非任何一个矢量場 (X, Y, Z) 都可以看成为一純量場的梯度. 如果如此,則必有一函数 φ 使

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=X, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=Y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}=Z. \tag{4}$$

由第 §16.8 的结果知道,有 φ 存在的必要且充分条件是

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}. \tag{5}$$

由純量場求梯度所得出的矢量場称为守恆矢量場，而 $\varphi(x, y, z)$ 称为这矢量場的势函数(或位函数). 条件(5)是矢量場 $\mathbf{R}$ 守恆的必要且充分条件.

由(5)引出一矢量

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

这矢量称为矢量 $\mathbf{R}$ 的渦度或旋量，以

$$\operatorname{rot} \mathbf{R} \quad 或 \quad \operatorname{curl} \mathbf{R}$$

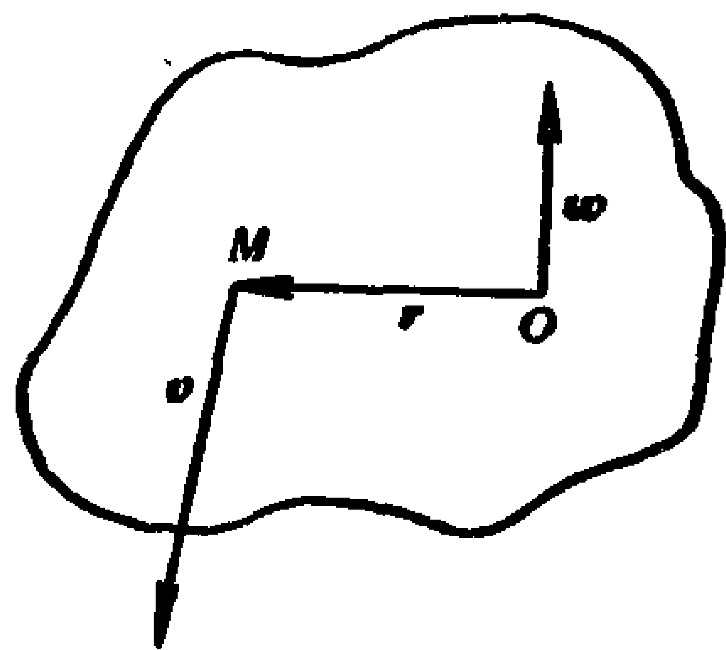
表之. 因此，矢量場 $\mathbf{R}$ 守恆的必要且充分的条件是渦度为零；也易見由純量場求梯度所获得的矢量場的渦度处处为 0. 渦度所表的矢量也成一矢量場.

我們还定义一个矢量 (X, Y, Z) 的散度

$$\operatorname{div} \mathbf{R}=\operatorname{div}(X, Y, Z)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

例 (刚体运动). 在刚体上取一点 O. 在运动学中已經証明 (或由第二章补充的結論)，任何时刻刚体上一点 M 的速度矢量 $\mathbf{v}$ 可以从公式

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}^{0}+\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



求出，其中 $\mathbf{v}^0$ 是 O 点的前进速度，$\boldsymbol{\omega}$ 是瞬时"角速度"，而 $\mathbf{r}$ 是 O 与 M 的位置矢量. 这矢量成一矢量場，它的支量是

$$v_x^0+\omega_y z-\omega_z y, \quad v_y^0+\omega_z x-\omega_x z, \quad v_z^0+\omega_x y-\omega_y x.$$

它的渦度是

$$\left(\frac{\partial\left(v_z^0+\omega_x y-\omega_y x\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(v_y^0+\omega_z x-\omega_x z\right)}{\partial z}, \frac{\partial\left(v_x^0+\omega_y z-\omega_z y\right)}{\partial z}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\left(v_z^0+\omega_x y-\omega_y x\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(v_y^0+\omega_z x-\omega_x z\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(v_x^0+\omega_y z-\omega_z y\right)}{\partial y}\right). \tag{6}$$

如果 $\mathbf{v}^0$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 与 x, y, z 无关，則式(6)取値 $2(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$，即渦度为"角速度"的倍数. 这就是渦度也称为旋量的道理.

§ 2. 三种算子的性質

散度，梯度，渦度都是綫性算子，也就是把它們运用在一綫性組合上，仍然得出相仿的綫性組合，即

$$\operatorname{div}(\lambda \mathbf{a}+\mu \mathbf{b})=\lambda \operatorname{div} \mathbf{a}+\mu \operatorname{div} \mathbf{b}, \tag{1}$$

$$\operatorname{grad}(\lambda \varphi+\mu \psi)=\lambda \operatorname{grad} \varphi+\mu \operatorname{grad} \psi, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}(\lambda \mathbf{a}+\mu \mathbf{b})=\lambda \operatorname{rot} \mathbf{a}+\mu \operatorname{rot} \mathbf{b}, \tag{3}$$

这儿 λ, μ 是任意的常数.

又关于各种乘积有以下的公式:

首先两函数之积的梯度

$$\operatorname{grad}(\varphi \psi)=\left(\frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial x}, \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial y}, \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial z}\right)=\varphi \operatorname{grad} \psi+\psi \operatorname{grad} \varphi. \tag{4}$$

函数φ的函数F的梯度等于

$$\text{grad}\, F(\varphi)=\left(\frac{\partial F(\varphi)}{\partial x},\ \frac{\partial F(\varphi)}{\partial y},\ \frac{\partial F(\varphi)}{\partial z}\right)=F'(\varphi)\text{grad}\,\varphi. \tag{5}$$

二矢量 $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 的內积的梯度等于

$$\begin{aligned}\text{grad}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\right)\\&=\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}\right)\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{b}\right),\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}\right)\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{b}\right),\right.\\&\left.\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}\right)\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{b}\right)\right)=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{b}+\\&+\left(b_x\frac{\partial}{\partial x}+b_y\frac{\partial}{\partial y}+b_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\text{rot}\,\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\text{rot}\,\mathbf{a}.\end{aligned} \tag{6}$$

函数φ乘矢量 $\mathbf{a}$ 的散度是

$$\text{div}\,\varphi\mathbf{a}=\frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial z}=\varphi\,\text{div}\,\mathbf{a}+\text{grad}\,\varphi\cdot\mathbf{a}. \tag{7}$$

两矢量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的外积的散度为

$$\begin{aligned}\text{div}\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=\frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z-a_zb_y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x-a_xb_z)+\frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y-a_yb_x)\\&=-a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)-a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)-a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\\&\quad+b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\\&=\mathbf{b}\cdot\text{rot}\,\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\text{rot}\,\mathbf{b}.\end{aligned} \tag{8}$$

函数乘矢量的渦度是

$$\text{rot}\,\varphi\mathbf{a}=\varphi\,\text{rot}\,\mathbf{a}+\text{grad}\,\varphi\times\mathbf{a}. \tag{9}$$

二矢量之外积的渦度是

$$\begin{aligned}\text{rot}\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=\left(b_x\frac{\partial}{\partial x}+b_y\frac{\partial}{\partial y}+b_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{a}\\&\quad-\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{b}\\&\quad+(\text{div}\,\mathbf{b})\mathbf{a}-(\text{div}\,\mathbf{a})\mathbf{b}.\end{aligned} \tag{10}$$

§3. 三种算子的迭用

运算 grad φ 把一純量場变为矢量場，运算 div $\mathbf{R}$ 把一矢量場变为純量場，而运算 rot $\mathbf{R}$ 复把一矢量場变为矢量場. 这三种运算的迭用可得以下的一些公式.

首先易証

$$\text{div rot}\,\mathbf{R}=0 \tag{1}$$

及

$$\text{rot grad}\,\varphi=\mathbf{0}. \tag{2}$$

其次，

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{3}$$

$$=\Delta\varphi(\text{Laplace 算子}).$$

最后由于

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{R}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right)$$

及

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{R}=\operatorname{rot}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\ \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\ \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial z},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 X}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial z\partial y}\right),$$

相减可得

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{R}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{R}=\Delta\mathbf{R}. \tag{4}$$

§4. 梯度的几何意义

命 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ 代表一单位矢量，它与 x,y,z 軸的夾角各为 α,β,γ. 函数 $\varphi(x,y,z)$ 在某一点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的微商是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{l}}=\left[\frac{d}{dt}\varphi(x+t\cos\alpha,\ y+t\cos\beta,\ z+t\cos\gamma)\right]_{t=0}$$

$$=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{t=0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{t=0}\cos\beta+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{t=0}\cos\gamma=\boldsymbol{l}\cdot\operatorname{grad}\varphi, \tag{1}$$

即等于矢量 $\boldsymbol{l}$ 与 φ 的梯度的内积，有时还記之为 $\operatorname{grad}_l\varphi$.

由 Schwarz 不等式

$$\boldsymbol{l}\cdot\operatorname{grad}\varphi\leqslant\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}, \tag{2}$$

上式仅当 $\boldsymbol{l}$ 与梯度 $\operatorname{grad}\varphi$ 平行且同向时取等号，也就是純量 $\varphi(x,y,z)$ 增长最快的方向与梯度所指的方向一致，而且增长率等于梯度矢量的长度，即

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

也就是沿等量面的法綫方向，純量 $\varphi(x,y,z)$ 增长得最快，而与之相反的方向，降得最快.

可以把一个綫积分写成为

$$\int_\Gamma X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz$$

$$= \int_\Gamma (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,ds$$

$$= \int_\Gamma \mathbf{R}\cdot \boldsymbol{l}\,ds,$$

这儿 $\boldsymbol{l}$ 是曲綫 Γ 的切綫方向.

如果 $(X, Y, Z) = \operatorname{grad}\varphi$, 则积分仅与曲綫的两端点 A, B 有关,即

$$\int_\Gamma \operatorname{grad}\varphi\cdot \boldsymbol{l}\,ds = \int_\Gamma \operatorname{grad}_l \varphi ds = \varphi(B) - \varphi(A).$$

若 Γ 为閉曲綫,则积分为零.

例 1. 命

$$\mathbf{R} = (xy, z, -xyz),$$

则沿积分途径

$$\Gamma_1:\ x = t,\quad y = t^2,\quad z = t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

的綫积分之值为

$$\int_0^1 (t^3dt + tdt^2 - t^4dt) = \frac{43}{60},$$

沿

$$\Gamma_2:\ x = t,\quad y = t,\quad z = t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

的綫积分之值为

$$\int_0^1 (t^2 + t - t^3)dt = \frac{7}{12}.$$

上述都是由 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,1)$ 的积分,但因路綫不同,故而数值不等. 其原因在于

$$\frac{\partial X}{\partial y} = x \text{ 与 } \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

不等. 因此, $\mathbf{R}$ 所定义的矢量場不是守恆的.

例 2. 假定在原点有一質量为 m 的質点,研究由这一質点所产生的引力場.

在 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 处有一单位質量,以上質点对这点的引力是

$$\mathbf{F} = -\frac{m}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

$\left(\text{Newton 定理: 引力大小是 } \frac{m}{|\mathbf{r}|^2}, \text{方向是 } -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right)$, 这儿 $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 显然有

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}\frac{m}{|\mathbf{r}|},$$

即

$$\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

是这引力場 $\mathbf{F}$ 的势函数.

更广泛些，不难証明：如果 $\varphi(x, y, z)$ 是 $|\mathbf{r}|$ 的函数，即球面是等量面，則梯度

$$\operatorname{grad} \varphi(|\mathbf{r}|) = \varphi'(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

与半径同向或反向，視 $\varphi'(|\mathbf{r}|) > 0$ 或 < 0 而定。

例 3. 如果 n 个質点各在 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 处，且各有質量 $m_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，則作用于 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 点的单位質量的力是

$$\mathbf{F} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

这引力場也是守恆的，其势函数等于

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

例 4. 更一般些，如有物質以密度 $\rho(x, y, z)$ 分布于空間的一部分 V，这批物質作用于 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 点的单位質量的力等于

$$\mathbf{F} = -\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_1)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} dV,$$

这儿积分的变数是 $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 过空間的一部分 V。

这样定义的引力場也是守恆的，其势函数为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV.$$

单位質量由 A 到 B 沿一曲綫运动所做出的功等于

$$\int_{(A)}^{(B)} X dx + Y dy + Z dz = \varphi(B) - \varphi(A).$$

§5. Остроградский-Gauss 公式、Stokes 公式的矢量表达形式

上章所講的 Остроградский-Gauss 公式是：

命 S 是包有空間的一部分 V 的周界曲面，在 V 及其周界 S 上都假定 $X(x, y, z)$、$Y(x, y, z)$，$Z(x, y, z)$ 有連續偏微商，在 S 上的一点，命 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 表曲面 S 在該点的向外的法綫方向单位矢量，則有

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint_S (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma) dS.$$

这公式显然可以表成为

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{R} dV = \iint_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{R} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{1}$$

这儿 $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ 而 $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}\, dS$。

Stokes 公式的原来形式是：

命 S 表一定向曲面的一側，l 表曲面的閉周界曲綫。假定 S 的每一点有切平面，其方向連續地依賴于曲面上的点（或更广泛些，S 可以划分为有限片这样的曲面）；并假定周界

綫 l 上的每一点皆有切綫方向(或者可以分为有限段这样的曲綫)，又 $X(x,y,z)$，$Y(x,y,z)$，$Z(x,y,z)$ 在曲面 S 上所有的点以及与 S 足够靠近的点都是有連續偏微商的連續函数，如此則

$$\int_{(l)} Xdx + Ydy + Zdz$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy$$
$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS,$$

这儿 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是曲面 S 的法綫方向. 注意曲面 S 是单側的，法綫方向是在同側的.

这个公式用矢量符号表示如下：

$$\int_{(l)} \mathbf{R}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\, dS. \tag{2}$$

Остроградский 公式最常用的一个特例是

$$\mathbf{R} = \varphi \operatorname{grad}\psi.$$

由公式 (2.7) 及公式 (3.3) 可知，

$$\operatorname{div}\mathbf{R} = \varphi \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi$$
$$= \varphi\Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi,$$

即得

$$\iiint_V (\varphi\Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi)\, dV = \iint_S \varphi \operatorname{grad}\psi\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

由于 $\operatorname{grad}\psi\cdot n$ 是函数 ψ 沿外法向的微商，即 $\frac{d\psi}{dn}$，所以得出

$$\iint_S \varphi\frac{d\psi}{dn} dS = \iiint_V \varphi\Delta\psi\, dV + \iiint_V \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi\, dV. \tag{3}$$

交换 φ, ψ 而相减得

$$\iint_S \left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right) dS = \iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dV \tag{4}$$

或

$$\iint_S (\varphi \operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\varphi)\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dV.$$

例 1. 取原点有质量为 m 的引力場

$$\mathbf{R} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3.$$

求积分

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

由 Остроградский 公式可知,我們应当計算

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{R}\, dV,$$

这儿

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = m\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=0.$$

由此并不能說明这积分等于 0，因为上式当 $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ 时正确，但在原点，$\mathbf{R}$ 并不連續，因而 $\operatorname{div}\mathbf{R}$ 在原点无定义. 由此只能証明：如果 S 不包有原点，則

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{R} dV = 0.$$

如果 S 包有原点，以原点为中心作一以 ε 为半径的小球，球面以 Σ 表之. 从 V 中挖去小球所余的部分以 V' 表之，因此，公式仍然可用，因而

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\sigma + \iint_\Sigma \mathbf{R}\cdot d\sigma = \iiint_{V'} \operatorname{div} \mathbf{R}\, dV = 0,$$

即得

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\sigma = -\iint_\Sigma \mathbf{R}\cdot d\sigma.$$

在 Σ 上

$$d\sigma = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}dS,$$

如此則

$$\iint_\Sigma \mathbf{R}\cdot d\sigma = m\iint_\Sigma \left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right)dS$$

$$= -\frac{m}{\varepsilon^2}\iint_\Sigma dS = -4\pi m.$$

即得

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\sigma = 4\pi m.$$

例 2 (Laplace 方程解的唯一性). 命 V 是一区域，在 V 上 φ, ψ 是 Laplace 方程

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

的两个解，而且在包有 V 的边界 S 上 $\varphi = \psi$. 求証：在 V 的内部也有 $\varphi \equiv \psi$（假定解在 V 及 S 上是有两阶偏微商的連續函数）.

命 $\theta = \varphi - \psi$，則 θ 仍然是 Laplace 方程的解，并且在 S 上 $\theta = 0$. 問題变为求証在 V 的内部 $\theta \equiv 0$. 在公式(3)中取 $\varphi = \psi = \theta$，則得

$$0 = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2\right]dV.$$

积分号下是非負的連續函数，因此在 V 中

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,$$

所以θ是常数. 由θ在S上等于0及其連續性可知$\theta\equiv 0$.

例 3 (解 Laplace 方程的一个方法). 求出函数φ,使其在V內适合 Laplace 方程

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,$$

而在V的边界S上，φ及其外法向微商$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$是已知函数.

在公式(4)中取$\psi=\dfrac{1}{r}$,而r是由一定点P(V內的)到任意点$Q=(x,y,z)$的距离. 但注意这函数在定点P不連續，因此不能直接运算公式 (4). 以P为中心，ε为半径作一小球,以Σ表此球面，以V'表V挖去此小球后的区域. 由于在V'中φ与$\psi=\dfrac{1}{r}$都适合 Laplace 方程,因此由公式(4)可知

$$\iint\limits_S\left(\varphi\operatorname{grad}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi\right)\cdot d\sigma=\iint\limits_\Sigma\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi-\varphi\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)\cdot d\sigma.$$

讀者自証,当$\varepsilon\to 0$时

$$\iint\limits_\Sigma\frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi\, d\sigma\to 0$$

及

$$\iint\limits_\Sigma\varphi\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,d\sigma\to-4\pi\varphi(x,y,z).$$

因此得出

$$\varphi(x,y,z)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\varphi(x_1,y_1,z_1)\operatorname{grad}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi(x_1,y_1,z_1)\right)\cdot d\sigma,$$

这儿$r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$. 这就是說，如果在$S$上給了$\varphi$及$\dfrac{d\varphi}{dn}$的函数值,則 Laplace 方程的解答由以上的积分表出（不难証明，它适合于 Laplace 方程. 但并未証明，当(x,y,z)趋于边界S时,φ及$\dfrac{d\varphi}{dn}$恰好就是所給的函数值).

習題. 用 Остроградский 公式算出

$$\iint\limits_S(xy\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+yz\,dx\,dy),$$

此处S是球面$x^2+y^2+z^2=n^2$.

§ 6. Nabla 算子

我們仍用

$$\mathbf{i}=(1,0,0),\quad \mathbf{j}=(0,1,0),\quad \mathbf{k}=(0,0,1)$$

代表三个相互垂直的矢量．显然有

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0;$$

及

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0,$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\ \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\ \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}.$$

任一矢量可以写成为

$$(a,b,c)=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}.$$

Nabla 算子或称 Hamilton 算子，記之为

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

∇ 也可以看成为以微分符号 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ 为支量的矢量.

利用这个符号，我們可以算出

$$\operatorname{grad} U=\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}=\nabla U; \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{v}&=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\\&=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\mathbf{i}v_x+\mathbf{j}v_y+\mathbf{k}v_z)=\nabla\cdot\mathbf{v};\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{v}&=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\\&=\nabla\times\mathbf{v}\end{aligned} \tag{3}$$

及

$$\Delta U=\nabla\cdot(\nabla U)(=\nabla^2 U). \tag{4}$$

又已知

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

如果 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$，則行列式等于 0．我們也有

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{v})=0. \tag{5}$$

又 $\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{a})=0$，我們也有

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}U=\nabla\times(\nabla U)=0. \tag{6}$$

Nabla 算子的运用法則如下：

i）綫性的，也就是如果 $a_1,\cdots,a_n$ 是常数，則

$$\nabla(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)=a_1\nabla X_1+\cdots+a_n\nabla X_n;$$

ii）如果把 ∇ 用在乘积上（乘积的因子可以是函数或矢量，乘法可以是普通的乘，內乘

和外乘，只要乘出来有意义)，其結果等于在每一因子上各作用一次然后再求总和，即如

$$\nabla(XYZ)=\nabla(\overset{\downarrow}{X}YZ)+\nabla(X\overset{\downarrow}{Y}Z)+\nabla(XY\overset{\downarrow}{Z}),$$

这儿↓表示∇用在指定的因子上．在实际計算时，不加此符号．

例 1.
$$\begin{aligned}\operatorname{div}(U\mathbf{v})&=\nabla\cdot(U\mathbf{v})\\&=\nabla\cdot(\overset{\downarrow}{U}\mathbf{v})+\nabla\cdot(U\overset{\downarrow}{\mathbf{v}})=\nabla U\cdot\mathbf{v}+U\nabla\cdot\mathbf{v}\\&=\operatorname{grad}U\cdot\mathbf{v}+U\operatorname{div}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

例 2.
$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)&=\nabla\cdot(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)\\&=\nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\mathbf{v}_1}\times\mathbf{v}_2)+\nabla\cdot(\mathbf{v}_1\times\overset{\downarrow}{\mathbf{v}_2})=\mathbf{v}_2\cdot(\nabla\times\mathbf{v}_1)-\mathbf{v}_1\cdot(\nabla\times\mathbf{v}_2)\\&=\mathbf{v}_2\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_1\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}_2\end{aligned}$$

例 3.
$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)&=\nabla(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\\&=\nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{v}_1}\cdot\mathbf{v}_2)+\nabla(\mathbf{v}_1\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{v}_2})\\&=(\mathbf{v}_2\cdot\nabla)\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\times(\nabla\times\mathbf{v}_1)+(\mathbf{v}_1\cdot\nabla)\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1\times(\nabla\times\mathbf{v}_2)\\&=(\mathbf{v}_2\cdot\nabla)\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\times\operatorname{rot}\mathbf{v}_1+(\mathbf{v}_1\cdot\nabla)\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

(这儿用了 $\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}+\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$)．

§7. 曲綫坐标及换变数

假定

$$x=f(\xi,\eta,\zeta),\quad y=g(\xi,\eta,\zeta),\quad z=h(\xi,\eta,\zeta)\tag{1}$$

把(ξ,η,ζ)空間的一个区域 $\mathfrak{D}$ 一一地且連續地变为(x,y,z)空間的一个区域 D，并且假定 f,g,h 都有連續偏微商．因为是一一对应，則由(1)可解得

$$\xi=\varphi(x,y,z),\quad \eta=\psi(x,y,z),\quad \zeta=\chi(x,y,z);\tag{2}$$

再假定 φ,ψ,χ 也有連續偏微商，微分(1)式得

$$\begin{aligned}dx&=\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta,\\dy&=\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta,\\dz&=\frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta,\end{aligned}$$

或逆变换

$$\begin{aligned}d\xi&=\frac{\partial\xi}{\partial x}dx+\frac{\partial\xi}{\partial y}dy+\frac{\partial\xi}{\partial z}dz,\\d\eta&=\frac{\partial\eta}{\partial x}dx+\frac{\partial\eta}{\partial y}dy+\frac{\partial\eta}{\partial z}dz,\\d\zeta&=\frac{\partial\zeta}{\partial x}dx+\frac{\partial\zeta}{\partial y}dy+\frac{\partial\zeta}{\partial z}dz.\end{aligned}$$

沿 dx、dy、dz 方向的单位矢量就是 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$，从而沿 $d\xi$，$d\eta$，$d\zeta$ 方向的单位矢量应当

是

$$\mathbf{e}_\xi=\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2},$$

$$\mathbf{e}_\eta=\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\mathbf{k}\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2},$$

$$\mathbf{e}_\zeta=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\mathbf{k}\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}.$$

如此,可以把一个由(x, y, z)坐标系所表达的矢量用(ξ, η, ζ)坐标系来表达,即

$$\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}=v_\xi\mathbf{e}_\xi+v_\eta\mathbf{e}_\eta+v_\zeta\mathbf{e}_\zeta.$$

这是由(ξ, η, ζ)坐标系所表达的形式,也就是

$$v_x=\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}v_\xi}{\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}}+\frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}v_\eta}{\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}}+$$

$$+\frac{\frac{\partial\zeta}{\partial x}v_\zeta}{\sqrt{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}},$$

$$v_y=\frac{\frac{\partial\xi}{\partial v}v_\xi}{\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}}+\frac{\frac{\partial\eta}{\partial v}v_\eta}{\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}}+$$

$$+\frac{\frac{\partial\zeta}{\partial v}v_\zeta}{\sqrt{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}},$$

$$v_z=\frac{\frac{\partial\xi}{\partial z}v_\xi}{\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}}+\frac{\frac{\partial\eta}{\partial z}v_\eta}{\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}}+$$

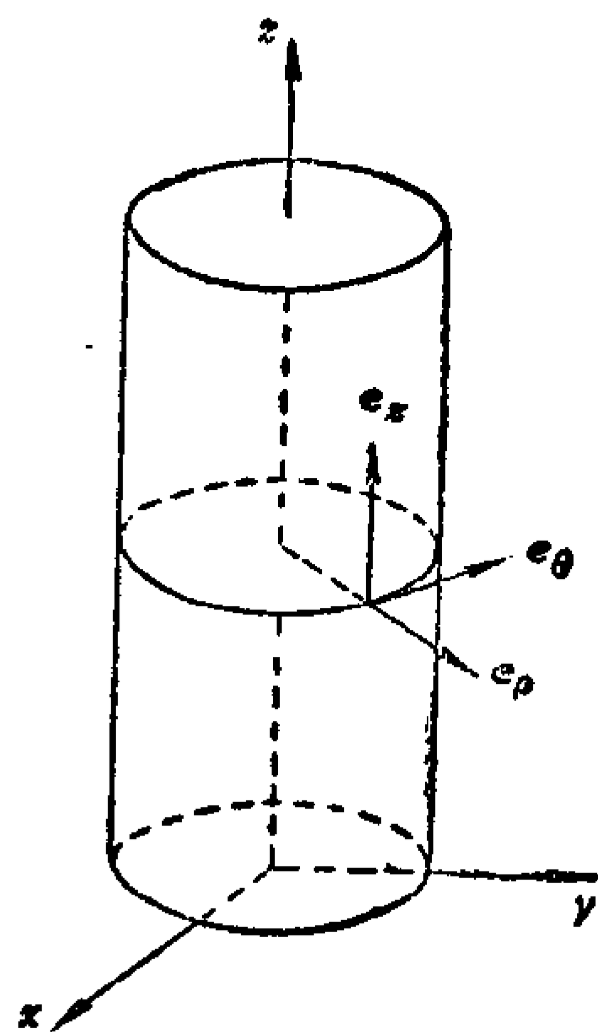
$$+\frac{\frac{\partial\zeta}{\partial z}v_\zeta}{\sqrt{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}}.$$

以柱坐标

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z$$

为例,我們有

$$\mathbf{e}_\rho=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j},$$



$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

由此即得从柱坐标到直角坐标的变换公式:

$$v_x = v_\rho\cos\theta - v_\theta\sin\theta,$$

$$v_y = v_\rho\sin\theta + v_\theta\cos\theta,$$

$$v_z = v_z.$$

反之,由直角坐标到柱坐标的公式是

$$v_\rho = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta,$$

$$v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta,$$

$$v_z = v_z.$$

因为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\theta, & \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{-\sin\theta}{\rho}, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\theta, & \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho}, \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \mathbf{i}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \sin\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \mathbf{j}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \cos\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z} = \tilde{\nabla}, \end{aligned}$$

这儿$\tilde{\nabla}$是柱坐标的 Nabla 算子.

又因 $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ 是活动坐标架的单位向量,它們是点 (ρ, θ, z) 的函数,而

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -\mathbf{e}_\rho, \quad \frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\rho} = \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\rho} = \frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial\rho} = \frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial z} = \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial z} = \frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial\theta} = 0,$$

则得

$$\operatorname{grad} U = \tilde{\nabla}U = \mathbf{e}_\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{v} &= \tilde{\nabla}\cdot\mathbf{v} \\ &= \left(\mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(v_\rho\mathbf{e}_\rho + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_z\mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial v_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{v} &= \nabla\times\mathbf{v}\\
&= \left(\mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(v_\rho\mathbf{e}_\rho+v_\theta\mathbf{e}_\theta+v_z\mathbf{e}_z)\\
&= \left(-\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\mathbf{e}_\theta+\frac{\partial v_\theta}{\partial\rho}\mathbf{e}_z\right)+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\mathbf{e}_\rho+\left(\frac{1}{\rho}v_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z\right)+\\
&\quad+\left(-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\mathbf{e}_\rho+\frac{\partial v_\rho}{\partial z}\mathbf{e}_\theta\right)=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho+\\
&\quad+\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\theta+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

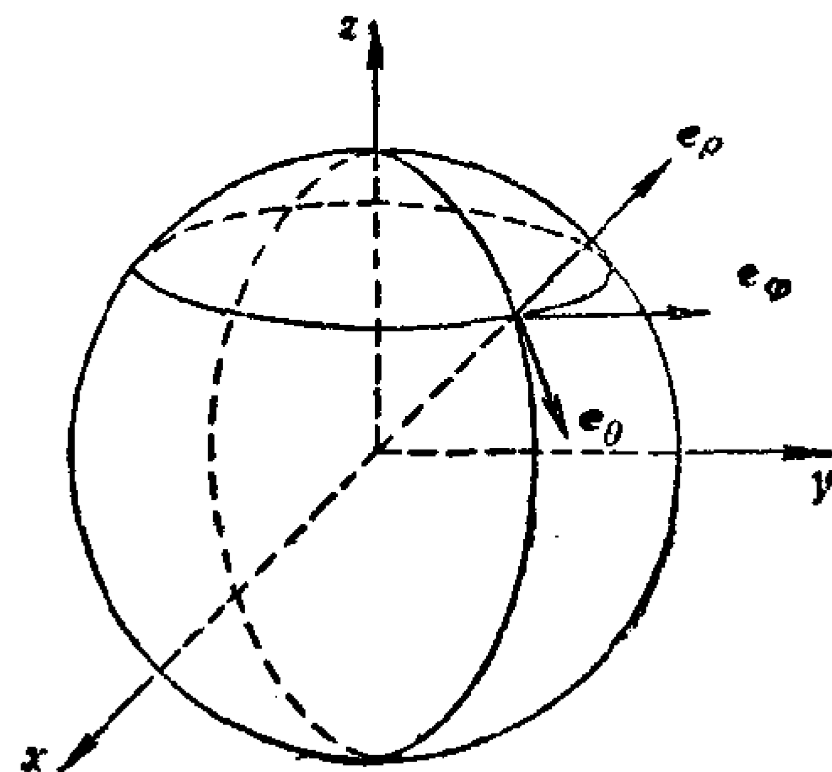
及

$$\Delta U=\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}.$$

以球坐标

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta$$

为例，我們有



$$\mathbf{e}_\rho=\sin\theta\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\theta\sin\varphi\mathbf{j}+\cos\theta\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\mathbf{i}+\cos\theta\sin\varphi\mathbf{j}-\sin\theta\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_\varphi=-\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\varphi\mathbf{j}.$$

于是得出由球坐标到直角坐标的公式：

$$v_x=v_\rho\sin\theta\cos\varphi+v_\theta\cos\theta\cos\varphi-v_\varphi\sin\varphi,$$
$$v_y=v_\rho\sin\theta\sin\varphi+v_\theta\cos\theta\sin\varphi+v_\varphi\cos\varphi,$$
$$v_z=v_\rho\cos\theta-v_\theta\sin\theta.$$

又由直角坐标到球坐标的公式是

$$v_\rho=v_x\sin\theta\cos\varphi+v_y\sin\theta\sin\varphi+v_z\cos\theta,$$
$$v_\theta=v_x\cos\theta\cos\varphi+v_y\cos\theta\sin\varphi-v_z\sin\theta,$$
$$v_\varphi=-v_x\sin\varphi+v_y\cos\varphi.$$

因为

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi, & \dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{\rho}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dfrac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta},\\
\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi, & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{\rho}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta},\\
\dfrac{\partial\rho}{\partial z}=\cos\theta, & \dfrac{\partial\theta}{\partial z}=-\dfrac{\sin\theta}{\rho}, &
\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}
\nabla &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\\
&= \mathbf{i}\left[\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]+\\
&\quad+\mathbf{j}\left[\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]+
\end{aligned}$$

$$+\mathbf{k}\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]$$

$$=\mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}=\overset{\approx}{\nabla},$$

这儿 $\overset{\approx}{\nabla}$ 是球坐标的 Nabla 算子.

又因

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\rho}=\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\rho}=\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\rho}=\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\theta}=\mathbf{e}_\theta,\quad \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta}=-\mathbf{e}_\rho,$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\varphi}=\sin\theta\mathbf{e}_\varphi,\quad \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\varphi}=\cos\theta\mathbf{e}_\varphi,\quad \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-(\sin\theta\mathbf{e}_\rho+\cos\theta\mathbf{e}_\theta),$$

则得

$$\operatorname{grad}U=\overset{\approx}{\nabla}U=\mathbf{e}_\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\overset{\approx}{\nabla}\cdot\mathbf{v}=\left[\mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\cdot[v_\rho\mathbf{e}_\rho+v_\theta\mathbf{e}_\theta+v_\varphi\mathbf{e}_\varphi]$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2v_\rho)\right]+\frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta)\right]+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=\overset{\approx}{\nabla}\times\mathbf{v}=\left[\mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\times[v_\rho\mathbf{e}_\rho+v_\theta\mathbf{e}_\theta+v_\varphi\mathbf{e}_\varphi]$$

$$=\left[\frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\varphi)-\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\right]\mathbf{e}_\varphi+\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\varphi)\right)\right]\mathbf{e}_\theta+\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\varphi$$

及

$$\Delta U=\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)\right]+\frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}.$$

習題 1. 試求出

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}$$

的柱坐标形式.

習題 2. 試求出

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}$$

的球坐标形式.

§8. 平 面 場

我們将平面場作为例子,复习已有的結果.

定义. 一个場称为平面場,如果它适合以下的两个条件: (i) 所有的矢量平行于一个固定的平面 P; (ii)在垂直于这平面 P 的任一直綫上,每一点的矢量都相等(长短,方向).

这样的場可以用平面 P 上的矢量所成的場来表达. 在講到平面場的一个点时, 我們記住,这是指通过这点与 P 垂直的直綫. 講到平面上一个区域时 就是指以这区域为正交

截面的一个柱体.

把平面 P 作为 (x, y) 平面、場中一切矢量都取 $(v_x, v_y, 0)$ 的形式，其中 v_x, v_y 与 z 无关. 今后还假定它与 t 无关，簡单地用 (v_x, v_y) 来代表. 如此，則

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

在 (x, y) 平面上取一閉曲綫 C，它包有一个区域 $\mathfrak{D}$. 現在在对应的柱体上研究 Stokes 与 Остроградский-Gauss 公式所取的形式.

首先討論 Stokes 公式

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathfrak{D}} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

現在

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(0, 0, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right),$$

而底面的法綫方向是(0, 0, 1)，因此

$$d\boldsymbol{\sigma} = (0, 0, dx\, dy).$$

从而 Stokes 公式变为

$$\int_C v_x dx + v_y dy = \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx\, dy, \tag{1}$$

这就是 Green 公式.

習題. 求出柱面上一閉曲綫的 Stokes 公式.

再看 Остроградский-Gauss 公式

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV, \tag{2}$$

这儿 S 表柱体的表面（包括柱面和上底 $z = h$ 及下底 $z = 0$），而 V 表柱体. 在上底及下底上

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1)$$

而 $v = (v_x, v_y, 0)$、因此 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$. 在柱面上，积分元素等于 $ds dz$，这儿 ds 是曲綫 C 的长度微分，而 $\mathbf{n}$ 正好是曲綫 C 的外法綫方向，即 $\left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right)$. 因此得

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds},$$

即(2)的左边等于

$$-\int_0^h dz \int_C v_y dx - v_x dy = -h \int_C v_y dx - v_x dy,$$

而(2)式的右边显然等于

$$\int_0^h dz \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

因之得出

$$-\int_C v_y\,dx - v_x\,dy = \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{3}$$

这就是 Green 公式.

附記. 特别提請注意,有时把(2)式写成

$$\iint_S v_x\,dy\,dz + v_y\,dz\,dx + v_z\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

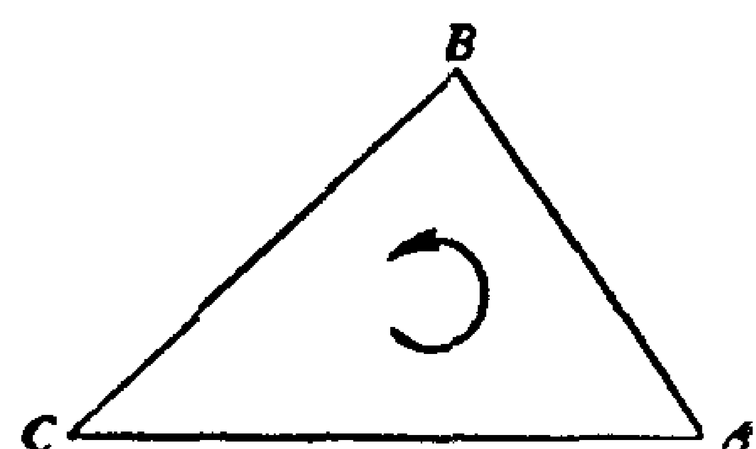
一不小心就会导致以下的錯誤:在柱面上,当 $v_z = 0$ 时,左边等于

$$\int_0^h dz\left(\int_C v_x\,dy + v_y\,dx\right),$$

因而得出荒謬的結論:

$$\int_C v_x\,dy + v_y\,dx = \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

其錯誤的根源在于把"三維空間中面积元素 $dy\,dz$"等同于"重积分的面积元素". 在三維空間中, $dy\,dz$ 代表由 dy 旋轉 $90°$ 到 dz 的面积元素,因之,与 $dz\,dy$ 适差一符号. 因而有时用 $[dy, dz]$ 来区别于我們普通的 $dy\,dz$. 最簡单的例子是:如果如图所示的方向为三角形的正面积,则 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ 都是正向. 至于高維的情况,将来再談.



(1),(3)二式可以写成为

$$\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{t}\,ds = \iint_{\mathfrak{D}} \operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{1}$$

$$\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_{\mathfrak{D}} \operatorname{div}\mathbf{v}\,d\sigma, \tag{3}$$

这儿 s 是曲綫上的长度度量,切向 $\mathbf{t}$ 与曲綫的走向一致, $\mathbf{n}$ 是法綫方向. 由 $\mathbf{n}$ 正向轉 $90°$ 到 $\mathbf{t}$, 即 $\mathbf{t} = (\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ 而 $\mathbf{n} = (\sin\theta, -\cos\theta) = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right)$.

积分

$$N = \int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_C v_x\,dy - v_y\,dx$$

表示場 $\mathbf{v}$ 經过曲綫 C 的流量. 当法綫方向取定后,顺法綫方向的为正,反之为負. 由(3)式,也可以写成为

$$N = \iint_{\mathfrak{D}} \operatorname{div}\mathbf{v}\,d\sigma.$$

在某一区域內 $\operatorname{div}\mathbf{v}$ 处处为 0 的場,称为管量場,即經过任何一条封閉曲綫的流量都是 0.

又由 $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ 可知

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y},$$

因而有一函数 V 存在,使

$$\frac{\partial V}{\partial y} = v_x, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -v_y.$$

这V称为流函数，V = 常数的綫称为流綫. 由 $\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy=0$ 可知流綫的方向$\frac{dy}{dx}$ $=\frac{v_y}{v_x}$也就是矢量v的方向，并已知在 $\mathfrak{D}$ 內对任意一条由 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 的曲綫 C，常有

$$N=\int_C -v_y\,dx+v_x\,dy=\int_C dV=V(x_2, y_2)-V(x_1, y_1).$$

积分

$$\Gamma=\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{t}\,ds=\int_C v_x\,dx+v_y\,dy$$

表示場 $\mathbf{v}$ 沿閉曲綫的环量. 由(1)式可知，如果 rot $\mathbf{v}$ 处处为 0，則 $\mathfrak{D}$ 中沿任一閉曲綫的环量都是 0. 这样的場称为守恆場(或称无渦場).

必存在一函数 $U(x, y)$，称之为势函数，使

$$\frac{\partial U}{\partial x}=v_x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=v_y.$$

U 等于常数的曲綫称为等势綫. 易見等势綫与流綫正交.

如果一个場旣守恆又管量，則得

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}.$$

这就是 Cauchy-Riemann 方程，也称 Euler-d'Alembert 方程.

例 1. 研究仅有一泉源(或滲井)(div $\mathbf{v}\neq 0$ 的点称为泉源)所产生的矢量場(注意，現在是平面場，因此就是在空間一直綫上处处有相等強度的源泉的場).

假定产生源泉的点是原点，則 div $\mathbf{v}=0$，当 $(x, y)\neq 0$. 由于对称关系，不妨假定这个場是由

$$\mathbf{v}=\varphi(r)\mathbf{r}^0 \tag{4}$$

所定义的，这儿 $\mathbf{r}=(x, y)$，$r=|\mathbf{r}|$，$\mathbf{r}^0=\frac{1}{r}\mathbf{r}$.

过圓周 $r=\rho$ 的流量等于

$$N=\int_{r=\rho}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds=\int_{r=\rho}\varphi(r)ds=2\pi\rho\cdot\varphi(\rho);$$

另一方面，在环 $(0<)\ \rho_1\leqslant r\leqslant\rho_2$ 中并无泉源，卽 div $\mathbf{v}=0$. 因此

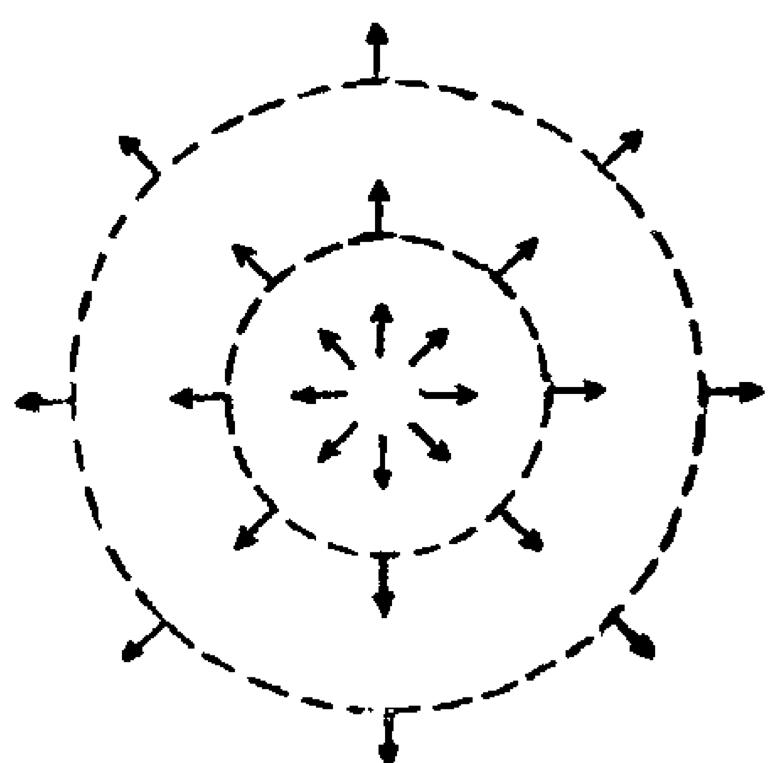
$$\left(\int_{r=\rho_2}-\int_{r=\rho_1}\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds=\iint_{\rho_1\leqslant r\leqslant\rho_2}\text{div}\,\mathbf{v}\,dx\,dy=0,$$

卽N是一常数，因而得出

$$\varphi(r)=\frac{N}{2\pi r}.$$

这N定义为泉源強度，代入(4)式得

$$\mathbf{v}=\frac{N}{2\pi r}\mathbf{r}^0=\frac{N}{2\pi}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$



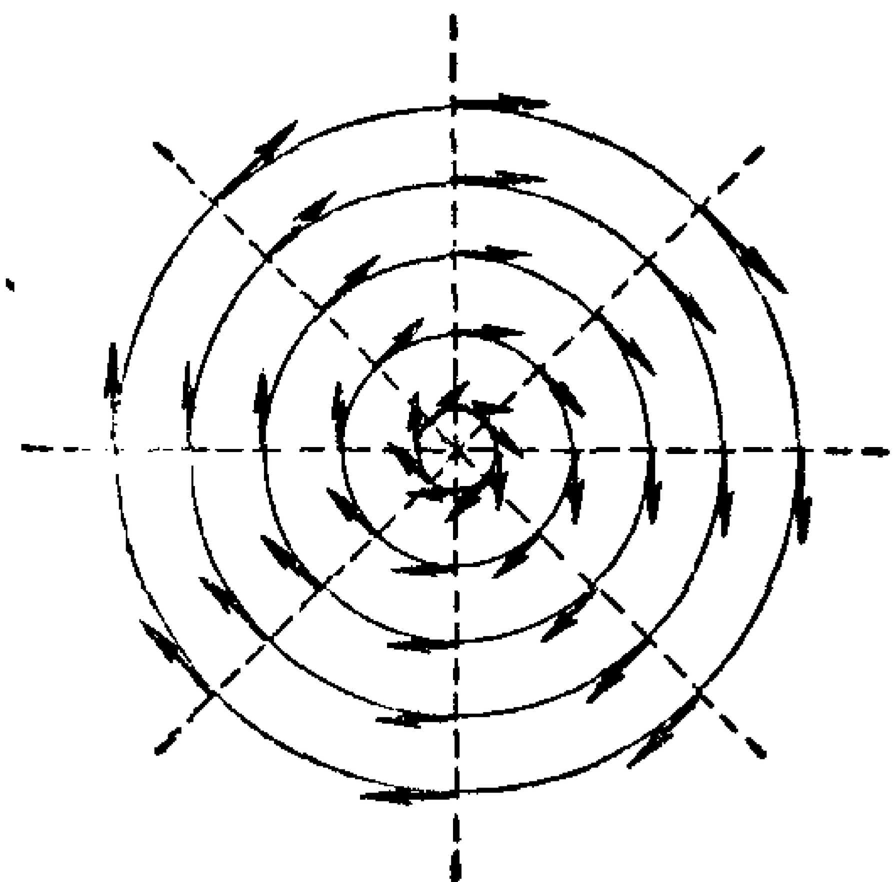
易見流函数与势函数各为

$$V = \frac{N}{2\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + C_1,\ U = \frac{N}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2} + C_2.$$

图中虚綫表示等位綫,箭头表示流綫.

例 2. 同法,如果涡点($\operatorname{rot}\mathbf{v} \neq 0$ 的点)在原点,仅由涡点所产生的矢量場的流函数与势函数各为

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2} + C_1,\ U = -\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + C_2.$$



图中虚綫表等位綫而实綫表流綫,Γ 称为涡点強度.

例 3. 假定在原点有一強度为 N 的源泉,它同时也是強度为 Γ 的涡点,因它所产生的場的势函数与流函数各为

$$U = \frac{N}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + C_1,$$

$$V = \frac{N}{2\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + \frac{\Gamma}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2} + C_2.$$

用极坐标得

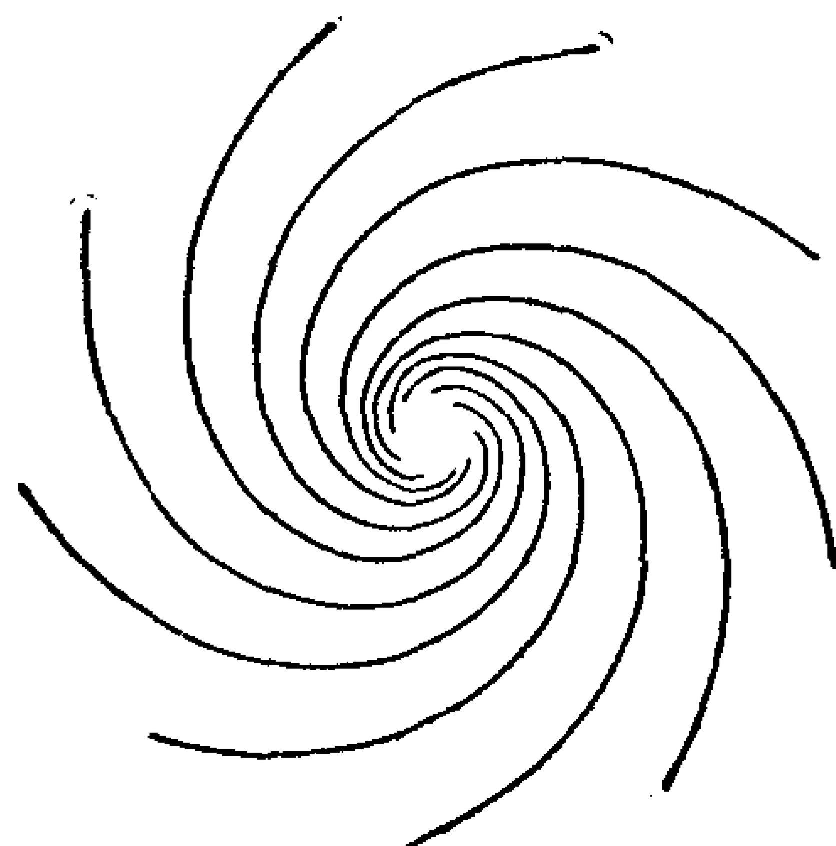
$$U = \frac{N}{2\pi}\log\rho - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + C_1,$$

$$V = \frac{N}{2\pi}\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\log\rho + C_2,$$

因此

$$U + iV = \frac{N}{2\pi}(\log\rho + i\theta) + \frac{i\Gamma}{2\pi}(\log\rho + i\theta) +$$

$$+ C_1 + iC_2 = \frac{N+i\Gamma}{2\pi}\log z + C,\ z = \rho e^{i\theta}.$$



其等位綫与流綫各为

$$\Gamma\log\rho + N\varphi = C_1,\ N\log\rho - \Gamma\varphi = C_2,$$

这是正交的对数螺綫族.

例 4. 在 n 点处,每处 (ξ_i, η_i) 各有一強度为 N_i 的泉源,则

$$U = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} N_i\log\sqrt{(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2}.$$

例 5. 如果泉源在一条曲綫上,可相仿得出

$$U = \frac{1}{2\pi}\int_C \rho(\xi,\eta)\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,ds,$$

这儿 ds 是 C 的长度微分,$\rho(\xi,\eta)$ 可以定义为泉源強度密度.

补　　充

§9. 在流体力学上的应用

在流体力学中，矢量分析有着重要的应用. 在研究流体运动时，出現各种各样的場，如密度場，速度場与加速度場. 第一个是純量場，后两个是矢量場.

1) 速度場

速度矢量 $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)$ 与位置 (x, y, z) 及时間 t 有关，微分方程

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}=dt$$

的解代表一族曲綫，称为流綫族. 流綫族是随 t 而变化的.

如果 v_x, v_y, v_z 与 t 无关，則流綫也就是質点运动的軌迹. 微分方程組

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}$$

可以理解为給了一矢量場 (v_x, v_y, v_z)，求一族曲綫，其上每一点的切綫方向都与在該点場的矢量相吻合. 微分方程的存在性与唯一性定理也可以理解为过所討論范围內的一点，有且仅有一条这样的曲綫，这样的曲綫也称为矢量綫. 由此可見，矢量綫是不相交的. 从流体力学的角度来看，这是显然的事实.

有时我們还討論矢量面，即对曲面上每一点，場中的矢量一定在曲面的切面上.

从一条异于矢量綫的曲綫出发，通过其上的每一点作一矢量綫，这些矢量綫上的点演成一曲面显然是一矢量面，原曲綫称为这矢量面的准綫.

当准綫是一閉曲綫时，得一管状閉曲面，这称为矢量管.

2) 散度

命 S 是一定向曲面的一側，即法向矢量肯定在 S 的一側，称为外面.

在无穷小时間 dt 內，通过曲面元素 dS 的流量可以看成为以 dS 为底、以 v_n 为高的水柱的体积，这儿 v_n 是矢量 $\mathbf{v}$ 在 S 的法綫上的投影. 命 $\rho=\rho(x, y, z, t)$ 表示流体密度，則在时間 dt 內，通过 dS 的流量等于

$$\rho v_n\, dS\, dt.$$

因此在单位时間內流过 S 面的流量等于

$$\iint_S \rho v_n\, dS.$$

由于

$$v_n=v_x\cos\alpha+v_y\cos\beta+v_z\cos\gamma.$$

命 $\mathbf{R}=\rho\mathbf{v}=(X, Y, Z)$，可知单位时間內流过 S 面的流量等于

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\, dS, \tag{1}$$

这儿 $\mathbf{n}$ 是 S 面的法向.

当 S 是一包有区域 V 的閉曲面，这积分就是流体从这区域流出的流量（注意“負”流出就是流进）. 这也就是 Остроградский 公式的一边. 如果将 S 縮小，最后使 V 縮成一点(x, y, z)，則极限

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS/V \quad (V\text{ 表区域 }V\text{ 的体积})$$

可以定义为散度，它等于

$$\lim_{V\to(x,y,z)}\frac{\iiint_V\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dV}{\iiint_V dV}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{2}$$

散度的流体力学的意义很明显，它是用来研究在一点流体“散”出的比率的.

$\operatorname{div}\mathbf{R}=0$ 表示这点既非源泉也非滲井.

3) 矢量管

假定所討論的曲面是矢量管，命 S_1 与 S_2 是矢量管的两断面，S_3 表示管壁，并且假定管內既无源泉又无滲井，即 $\operatorname{div}\mathbf{R}=0$.

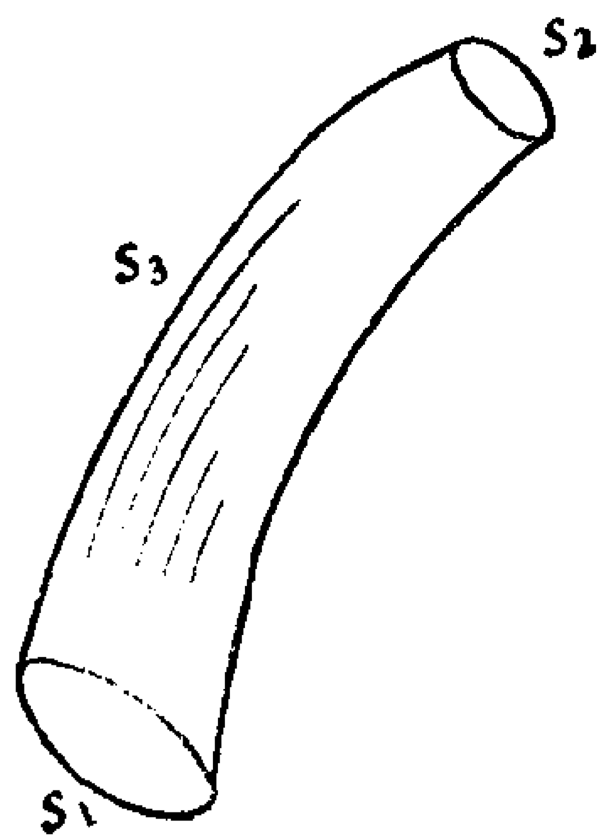


图 101

由 Остроградский–Gauss 公式得

$$\left(\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}\right)\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS=0,$$

这儿法綫方向都是向外的. 由于矢量管的性質，在 S_3 上 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{n}$ 垂直，即 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}=0$（也就是流体不通过管壁外流），亦即

$$\iint_{S_3}\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS=0.$$

把 S_1 处的法綫方向改为內向，則得公式

$$\iint_{S_1}\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_{S_2}\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

即通过矢量管的流量对任一橫断面都是一样的(注意，“管”并不一定指眞的在一根管子內流动，而是指具有此性質的一部分流体).

4) 渦量(或旋度)

命 l 是一条封閉曲綫，綫积分

$$\int_l \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_l v_x\,dx+v_y\,dy+v_z\,dz$$

称为按一定方向繞曲綫 l 一周的速度环量. Stokes 公式

$$\int_l \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

可以理解为 S 渦度矢量 $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ 通过 S 面的“流量”等于沿这曲面的界綫 l 的速度环量. 由于 S 是定向的曲面的一側，l 的正向也由之而定义了.

从一点M出发，作一单位矢量 $\mathbf{m}$. 在垂直于 $\mathbf{m}$ 的平面上作一繞M的閉曲綫 l，如是得

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{m} = \lim_{S \to M} \frac{\int_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{S}, \tag{3}$$

这儿 S 也代表 S 的面积，即当面积无穷縮小时，繞一点的环流量与面积之比的极限等于渦度矢量在 $\mathbf{m}$ 上的投影长度.

一般地講，曲面 S 上繞一点的环流量与曲面积之比的极限等于渦度矢量与曲面的法綫的內积.

5）連續性方程

假定某流体連續地充满空間某一区域 V，并假定在其中旣无泉源又无滲井. 一般說来，流体密度可以是依賴于时間地点而变化的（卽可压縮的流体）.

假定曲面 S 是 V 的界面，在单位时間內向外流出的流量等于

$$Q = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

这儿 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 是流体的密度，$\mathbf{n}$ 是曲面 S 的外法綫单位矢量.

另一方面，从 V 內流体的总質量来考慮. 在时間 dt 內，密度的改变量是 $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$，体积元素 dV 的質量 ρdV 的改变量等于

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, dV,$$

因而整个 V 的流体量的改变量等于

$$dt \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

这就是 dt 时間內流进的流量. 改变符号，在单位时間內流出的流量等于

$$Q = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

卽

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0. \tag{4}$$

用 Остроградский 公式可知

$$\iiint_V \left(\operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

这对于 V 內任何一块都成立，因此得出流体力学上著名的**連續性方程**：

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{5}$$

如果有泉源或渗井，假定流体物质增长的速度是 $k\rho(x, y, z, t)$，則我們必須添上单位时間內所增加的質量

$$\iiint\limits_V k\rho\, dV,$$

因而連續性方程变为

$$\operatorname{div} \rho v + \frac{\partial \rho}{\partial t} = k\rho, \tag{6}$$

比例常数 k 称为增长因子.

由于流体的密度 $\rho(x, y, z, t)$ 与时間 t 及位置(x, y, z)有关，而位置(x, y, z)又依时間而变化，因此

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \tag{7}$$

这儿 $\frac{d\rho}{dt}$ 是密度 ρ 在运动中的变更率，而 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 表示在一定点密度 ρ 的变更率. 这式子也可以写成

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho, \tag{8}$$

这儿

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

代入(5)式得

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}, \tag{9}$$

卽

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \tag{10}$$

亦卽散度 div **v** 等于流体在該点的密度 ρ 的相对改变率，所以无源泉（或渗井）而且不可压縮流体的矢量場(速度)可由

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{11}$$

来刻划.

如果也沒有渦度，卽

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0,$$

則有 Φ 存在，使

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi.$$

代入(11)得

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0,$$

卽

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{12}$$

这儿Φ称为速度势函数、即依不可压缩的流体而言，速度势适合于 Laplace 方程(12). 同法可証，在可压縮的情况下，方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \tag{13}$$

6）理想流体的运动方程

所謂理想流体，是指无粘滞性的流体而言.

一般說来，物体的运动取决于外力与內力. 我們考虑一极簡单的情况：外力与质量成比例. 命 $\mathbf{F}$ 是作用在一单位质量上的力，在体积元素 dV 上作用的力等于 $\rho dV\,\mathbf{F}$.

至于內力，也就是流体中一块V所受到其余部分的力. 对理想流体来說，这等于朝向流体內部的压力. 命S是体积V的界面，这也就是曲面S上所受的压力. 以$(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$表曲面$S$的向外法綫的方向余弦，曲面元素$dS$上所作用的力在坐标軸上的投影等于

$$-p\cos\lambda dS,\quad -p\cos\mu dS,\quad -p\cos\nu dS,$$

这儿p代表单位面积上所受的压力. 因此，作用在V上的力等于矢量

$$\left(-\iint\limits_S p\cos\lambda\,dS,\ -\iint\limits_S p\cos\mu\,dS,\ -\iint\limits_S p\cos\nu\,dS\right).$$

用 Остроградский–Gauss 公式(例如，在第一支量上取 $\mathbf{R}=(p,0,0)$)得

$$\left(-\iiint\limits_V \frac{\partial p}{\partial x}dV,\quad -\iiint\limits_V \frac{\partial p}{\partial y}dV,\quad -\iiint\limits_V \frac{\partial p}{\partial z}dV\right),$$

也就是加于dV上的力是

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}dV,\ \frac{\partial p}{\partial y}dV,\ \frac{\partial p}{\partial z}dV\right)=-dV\operatorname{grad}p.$$

由 Newton 定律

$$\rho\,dV\,\mathbf{a}=\rho\,dV\,\mathbf{F}-dV\operatorname{grad}p,$$

这儿 $\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ 是加速度，也就是

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{a}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p, \tag{14}$$

这就是理想流体的运动方程，也是流体力学及空气动力学中的基本公式.

在流体力学中，常用u, v, w表示速度矢量$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$的支量. 由于位置(x, y, z)与速度(u, v, w)都与t有关，所以

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dt}&=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}\\&=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w,\end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w.$$

把 $\mathbf{F}$ 写为 (F_x, F_y, F_z)，則(14)式变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

这称为 Euler 公式.

这公式也可以改写为矢量形式:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{v}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

如果以 $\mathbf{v}\cdot\nabla$ 表算符 $u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$，則得

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

7）合而言之,流体的速度 $\mathbf{v}=(u, v, w)$，压力 p 及密度 ρ 适合于

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0 \quad (\text{連續方程}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \quad (\text{运动方程}),$$

这儿有五个未知函数,但仅有四个方程,余下的一个是压力 p 与密度 ρ 关系的物态方程

$$p=f(\rho),$$

这样便得出流体动力学的完全方程組.

8）現在来說明公式

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{R}=0$$

在流体力学上的意义. 我們考虑涡度矢量所成的場，上式說明这样的場永远是管量場，这場当然有矢量曲綫,矢量管等等. 这样的矢量管称为轉动管，也有所謂"流量"通过轉动管的任一断面都相等的現象.

§10. 声的传播

我們現在把流体动力学的方程应用到声的传播过程. 我們作以下一些假定: (i) 声的传播过程是絕热的,也就是假定物态方程是 Poisson 絕热綫

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \quad \gamma=c_p/c_v,$$

这儿 ρ_0, p_0 是初始密度与压力，而 c_p 与 c_v 是定压比热与定容比热；(ii) 气体振动是微小的，也就是可以把速度，速度的梯度，密度 ρ 的梯度这些数量的高次項略去不計。

引进密度的相对变化

$$s = s(x, y, z, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},$$

卽得

$$\rho = (1 + s)\rho_0.$$

在这些假定下，流体动力学的方程变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \mathbf{F} - \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ p &= p_0(1 + s)^{\gamma} \doteq p_0(1 + \gamma s) \end{aligned} \tag{1}$$

(这是因为

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho_0}(1 + s)^{-1}\operatorname{grad} p \doteq \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p,$$

$$\operatorname{div} \rho\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{v} \doteq \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v}).$$

命 $a^2 = \gamma p_0/\rho_0$, 則得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \mathbf{F} - a^2 \operatorname{grad} s, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= -\operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

交換微分次序，并消去 $\mathbf{v}$, 得

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}(-a^2 \operatorname{grad} s + \mathbf{F}) = \operatorname{div}\mathbf{F} - a^2 \Delta s,$$

卽得波动方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \Delta s - \operatorname{div}\mathbf{F}. \tag{3}$$

如果沒有外力，卽 $\mathbf{F} = 0$, 則得波动方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \Delta s = a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right).$$

注意 s 是压縮或膨胀現象的量的刻划，因此这方程所代表的是声的传播律，$\operatorname{div}\mathbf{F}$ 代表声源。

§11. 热 的 传 导

一个物体在不同点与不同时間有不同的温度 $\varphi(x, y, z, t)$，这样定义一个純量場，卽温度場. 矢量

$$-k \operatorname{grad} \varphi$$

称为热流矢量，其中 $k>0$ 是比热系数. 我們所以用(—)号，是根据"热向低处流"而取定的. $\operatorname{grad}\varphi$ 的方向是 φ 增长得最快的方向(§4)，因此取(—)号表示热向低处流.

取一曲面元素 dS，在时間 dt 通过 dS 的热量与 $dt\,dS$ 及温度法向微商 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 成比例，也就是說，

$$\Delta Q = k\,dt\,dS\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| = -k\,dt\,dS\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{n}.$$

因此，如果閉曲面 S 包有 V，則通过 S 的全部热量等于

$$-dt\iint_S k\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{1}$$

假定无热源，則单位时間內物体 V 通过界面 S 流出的热量等于

$$Q = -\iint_S k\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_S k\operatorname{grad}\varphi\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

用 Остроградский-Gauss 公式并改变符号，可知流入的热量等于

$$\iiint_V \operatorname{div}(k\operatorname{grad}\varphi)\,dV. \tag{2}$$

再用另一方法来計算 V 的热量. 在时間 dt 內，温度增加

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt,$$

則 dV 需要輸入的热量是

$$c\,d\varphi\,\rho\,dV = c\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt\,\rho\,dV,$$

这儿 c 是一比例系数，叫做物質的热容量，而 ρ 是物質密度. 在时間 dt 內整个立体 V 要吸收的热量，等于

$$dt\iiint_V c\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dV.$$

单位时間內吸收的热量等于

$$\iiint_V c\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dV. \tag{3}$$

由于(2)，(3)相等，因此

$$\iiint_V \left\{c\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(k\operatorname{grad}\varphi)\right\}dV = 0.$$

这对所考察的区域內的任何一部分都对，所以有方程

$$c\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad}\varphi), \tag{4}$$

这是有名的热传导方程.

在均匀介質中，命 $a^2=\frac{k}{c\rho}$，則得方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \Delta \varphi = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right).$$

当温度稳定分布时，即 φ 仅依赖于位置 x, y, z 而不依赖于时間 t 时，則温度 φ 适合于 Laplace 方程

$$\Delta \varphi = 0.$$

以上所論，是在假定无热源的情况．如果有热源，則有以下的式子：

$$\iiint\limits_V \left\{ c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \varphi) \right\} dV = \iiint\limits_V e\, dV.$$

最后一項表示在单位时間內由 V 放出的热量．

被积函数 $e = e(x, y, z, t)$ 給出連續分布于 V 中的热源強度，因此得出

$$c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = e.$$

在均匀介質的情况下，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \Delta \varphi + \frac{e}{c\rho}.$$

第十八章　曲面的微分性质

§1. 代 数 工 具

我們現在先叙述一下本章所要用到的代数工具，有些是已經有过的，有些是新的．不必查书，讀者試补出沒有証明的公式的証明．

1）$\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$，　$\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 是二矢量，則

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \tag{1}$$

(§ 2.5,2).

2）任意四个矢量 **a**、**b**, **c**, **d** 之間有次之恆等式：

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \tag{2}$$

(定理 2. 6. 3).

3）做二次型

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\cdot(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2,$$

其行列式

$$EG-F^2=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2. \tag{3}$$

作

$$(\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d})\cdot(\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d})=E_0\lambda^2+2F_0\lambda\mu+G_0\mu^2 \tag{4}$$

及

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\cdot(\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d})=L\lambda^2+2M\lambda\mu+N\mu^2. \tag{5}$$

如果

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\ 及\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}\ 平行于\ \mathbf{c}\times\mathbf{d},\ 則$$

$$(LN-M^2)^2=(EG-F^2)(E_0G_0-F_0^2). \tag{6}$$

由(5)及 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ 得

$$LN-M^2=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-\frac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2$$

$$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}).$$

再由 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 平行于 $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$，故得

$$((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}))^2=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2|\mathbf{c}\times\mathbf{d}|^2=(EG-F^2)(E_0G_0-F_0^2).$$

4）假定 $a>0$，$ac-b^2>0$．命 λ_1, λ_2 是

$$(a\lambda-a')(c\lambda-c')-(b\lambda-b')^2=0 \tag{7}$$

的两个根，$\lambda_1\leqslant\lambda_2$，則

$$\lambda_1\leqslant\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{ax^2+2bxy+cy^2}\leqslant\lambda_2. \tag{8}$$

証. 由于齐次性，函数

$$\frac{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}{ax^2 + 2bxy + cy^2} \tag{9}$$

的最大、最小值等于在椭圓

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

上函数 $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ 的最大、最小值，所以存在性是沒有問題的. 由

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 - \lambda_1(ax^2 + 2bxy + cy^2) = (a' - \lambda_1 a)\left(x + \frac{b' - \lambda_1 b}{a' - \lambda_1 a} y\right)^2 \tag{10}$$

可知，如果 $a' - \lambda_1 a > 0$，則

$$\frac{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}{ax^2 + 2bxy + cy^2} \geqslant \lambda_1.$$

如果 $a' - \lambda_1 a < 0$，則

$$\frac{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}{ax^2 + 2bxy + cy^2} \leqslant \lambda_1,$$

即 λ_1 不是最大值，就是最小值；λ_2 也是如此. 但 λ_2 比 λ_1 大，所以得出(8)式.

由(10)可見，当

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = -\frac{b' - \lambda_1 b}{a' - \lambda_1 a} \tag{11}$$

时，函数(9)确取下界 λ_1，而当

$$\frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2} = -\frac{b' - \lambda_2 b}{a' - \lambda_2 a} \tag{12}$$

时，函数(9)确取上界 λ_2.

5) 方程(7)可以写成为

$$(ac - b^2)\lambda^2 - (ac' + a'c - 2bb')\lambda + a'c' - b'^2 = 0, \tag{13}$$

所以

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a'c' - b'^2}{ac - b^2} \tag{14}$$

及

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{ac' + a'c - 2bb'}{ac - b^2}. \tag{15}$$

因此

$$\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2} = \frac{b'^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)bb' + \lambda_1\lambda_2 b^2}{a'^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)aa' + \lambda_1\lambda_2 a^2} = \frac{b'c - c'b}{a'b - b'a}$$

及

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} = -\frac{2a'b' - (ab' + a'b)(\lambda_1 + \lambda_2) + 2\lambda_1\lambda_2 ab}{a'^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)aa' + \lambda_1\lambda_2 a^2} = -\frac{a'c - c'a}{a'b - b'a}.$$

因此 $x_1:y_1$ 与 $x_2:y_2$ 是以下的二次型的两根：

$$(ab' - ba')x^2 - (a'c - c'a)xy + (bc' - cb')y^2 = 0. \tag{16}$$

6) 极易推得

$$ax_1x_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cy_1y_2 = 0. \tag{17}$$

§ 2. Gauss 第一微分型

我們現在考慮由参数 u, v 表达的曲面 S:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \omega(u, v), \tag{1}$$

或者用矢量符号

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{2}$$

表之.

如果 u, v 又是参变数 t 的函数,則当 t 变时,我們就得出 S 上的一条曲綫 c, 这条曲綫的切綫方向是

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{dt},\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{dv}{dt},\\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{dv}{dt}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

命

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}_u &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial u}\right),\\ \mathbf{r}_v &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial v}\right),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

則曲綫 c 的切矢量等于

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{du}{dt}\mathbf{r}_u + \frac{dv}{dt}\mathbf{r}_v. \tag{5}$$

因此曲綫 c 的切方向由 $\frac{du}{dt}$ 和 $\frac{dv}{dt}$ 唯一地决定.

特别,当 u 或 v 取常数値时,在曲面上我們得出两族曲綫,这两族曲綫称为曲面上的坐标綫,坐标綫上曲面的切綫方向各为 $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_u$.

今后我們只考慮曲面 S 上的这类点:在这些点上,矢量 $\mathbf{r}_u$ 和 $\mathbf{r}_v$ 互不平行. 特别,两个都不是零矢量.

这个条件告訴我們,二阶行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\omega}{\partial u}\\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\omega}{\partial v}\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\frac{\partial\omega}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial\omega}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}$$

当中至少有一个不为零. 例如,第一个行列式不为零,那末由隐函数存在定理,我們可以反解出

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

因此曲面 S 在这点附近可以写成显函数的形式:

$$z = \omega(u, v) = \omega(u(x, y), v(x, y))$$

(注意,这不等于說整个曲面可以用一个显式表示. 例如,球面 $x^2+y^2+z^2-1=0$)。

例. 以原点为中心、R 为半径的球面:

$$x=R\sin u\cos v,\quad y=R\sin u\sin v,\quad z=R\cos u$$

当 $u=c_1$ 时,得出球面上的緯綫;而 $v=c_2$ 时,得出球面上的經綫,經綫、緯綫合成球面上的坐标綫. 沿緯綫的切方向是

$$(-R\sin c_1\sin v,\quad R\sin c_1\cos v,\quad 0).$$

它是和 (x, y) 平面平行的矢量.

曲綫 c 的弧长的微分的平方等于

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2+dy^2+dz^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}du+\frac{\partial\omega}{\partial v}dv\right)^2 \\ &= E(u, v)du^2+2F(u, v)dudv+G(u, v)dv^2, \end{aligned} \tag{6}$$

此处

$$\left.\begin{aligned} E(u, v) &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2, \\ F(u, v) &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}, \\ G(u, v) &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

用矢量符号

$$E=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u,\quad F=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v,\quad G=\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v, \tag{8}$$

(6)称为 Gauss 第一微分型.

坐标綫 $u=c_1$ 及 $v=c_2$, 相互正交的必要且充分条件是 $F=0$. 在这样的情况下,曲面上的坐标系称为正交坐标系.

由 § 1, (1)可知,第一微分型的判别式等于

$$EG-F^2=|\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2-(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v)^2=|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|^2,$$

即二矢量 $\mathbf{r}_u$ 与 $\mathbf{r}_v$ 的矢量积长度的平方. 前已知道它等于以 $\mathbf{r}_u$ 及 $\mathbf{r}_v$ 为边的平行四边形面积的平方.

从一点 $A(=(u, v))$ 出发, 沿 $v=c_2$ 作一微分矢量 $\mathbf{r}_u du$, 沿 $u=c_1$ 作一微分矢量 $\mathbf{r}_v dv$, 这二矢量所定义的平行四边形的面积用 dS 表之,称为曲面上的面积元素. 由

$$(\mathbf{r}_u\,du)\times(\mathbf{r}_v\,dv)=(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,du\,dv$$

可知,

$$dS^2=|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,du\,dv=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{9}$$

注意, $EG-F^2$ 总是正的,这是因为在我們所考慮的点上,矢量 $\mathbf{r}_u$, 和 $\mathbf{r}_v$ 互不平行.

給了两个方向 (du, dv) 与 $(\delta u, \delta v)$, 有两个切矢量

$$\mathbf{r}_u\,du+\mathbf{r}_v\,dv,\quad \mathbf{r}_u\,\delta u+\mathbf{r}_v\,\delta v.$$

这两个矢量的夹角余弦等于

$$\frac{(\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)\cdot(\mathbf{r}_u\delta u + \mathbf{r}_v\delta v)}{|\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv|\,|\mathbf{r}_u\delta u + \mathbf{r}_v\delta v|} =$$

$$= \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)(E\delta u^2 + 2F\delta u\,\delta v + G\delta v^2)}}. \tag{10}$$

如果过一点有二曲綫,它們在这点的切綫方向各为 (du, dv), $(\delta u, \delta v)$, (10) 也称为这两曲綫的夹角余弦.

習題. 这些习題应随着課程的进展而逐步完成. 以下給一批曲面,現求出它們的第一微分式; 学了 §3 就求出它們的第二微分式; 学了 §5 就看点的分类; 学了 §6 就計算曲率网、主曲率等等. 总之,这些习题与本章相始終.

1. 球:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

2. 曲面:

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

3. 环面:

$$4b^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2.$$

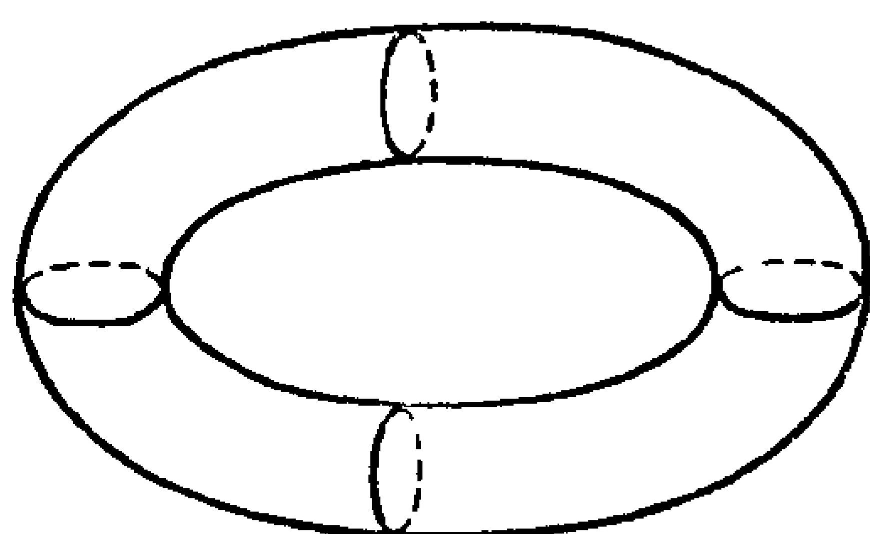


图 104

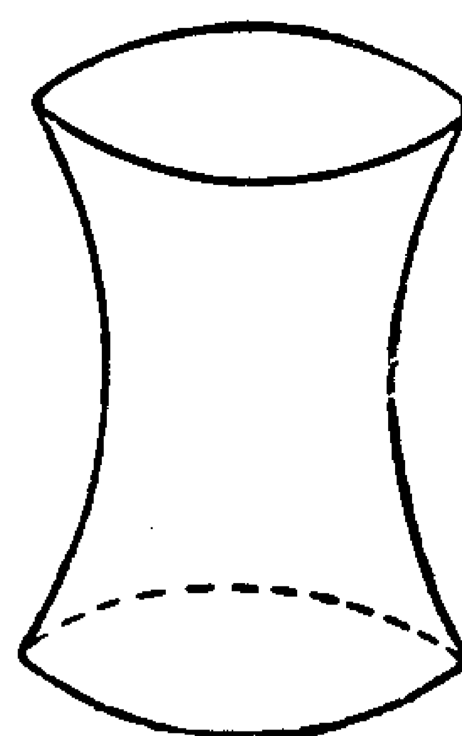


图 105

它是一个球族所占有的空間部分的表面(这个球族的半径为 a, 而球心在半径为 b 的圓上), 利用参数方程

$$\mathbf{r} = ((b + a\cos\psi)\cos\varphi,\ (b + a\cos\psi)\sin\varphi,\ a\sin\psi).$$

解答. 第一微分型 $ds^2 = a^2 d\psi + (b + a\cos\psi)^2 d\varphi^2$.

4. 悬鏈面(由悬鏈綫繞基綫旋轉而得的). 悬鏈綫的方程是

$$\mathbf{r} = \left(a\,\mathrm{ch}\frac{t}{a}\cos\varphi,\ a\,\mathrm{ch}\frac{t}{a}\sin\varphi,\ t\right).$$

解答. 第一微分型: $ds^2 = a^2\,\mathrm{ch}\,u(du^2 + dv^2)$.

5. 螺旋面. 平面曲綫繞同平面上的一直綫旋轉, 并沿此直綫的方向前进,使所行距离与旋轉角度成比例,即得螺旋面. 它的方程是

$$\mathbf{r} = (\eta(t)\cos\varphi,\ \ \eta(t)\sin\varphi,\ \ \xi(t) + a\varphi)$$

(当 $a = 0$ 时螺旋面化为旋轉曲面).

解答. 第一微分型 $ds^2 = (\eta'^2 + \xi'^2)dt^2 + 2a\xi\,dt\,d\varphi + (\eta^2 + a^2)d\varphi^2$.

§ 3. Gauss 第二微分型

矢量积

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

是曲面的法綫方向，则

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

为单位法綫方向，即

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{1}$$

显然有

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} = 0, \tag{2}$$

微分此式得出

$$-d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{m} = d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}. \tag{3}$$

微分型

$$-d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{m} = -(\mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv)(\mathbf{m}_u\, du + \mathbf{m}_v\, dv) = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 \tag{4}$$

称为 Gauss 第二微分型，此处

$$\left.\begin{aligned} L &= -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{m}_u, \\ M &= -\frac{1}{2}(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{m}_v + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{m}_u), \\ N &= -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{m}_v. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(3)式右边等于

$$(\mathbf{r}_{uu}\, du^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\, du\, dv + \mathbf{r}_{vv}\, dv^2) \cdot \mathbf{m},$$

因此

$$L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{m}, \quad M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{m}, \quad N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{m}, \tag{6}$$

由(1)可知，

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\mathbf{r}_{uu} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \\ M &= \frac{\mathbf{r}_{uv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \\ N &= \frac{\mathbf{r}_{vv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

在显式表达形式

$$z=f(x, y)$$

时，用符号

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

则得

$$E=1+p^2,\quad F=pq,\quad G=1+q^2$$

及

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

§4. 曲面上曲綫的曲率

c 是曲面 S 上的任意一条曲綫，M 是这曲綫上的一点．在曲綫 c 上的长度微分是 ds．由上节公式(3)可知，

$$\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}=-\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{m}}{ds}=\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\cdot\mathbf{m}. \tag{1}$$

由于 $\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 是曲綫上的单位切矢量，由 Frenet-Serret 公式

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{\mathbf{n}}{\rho}, \tag{2}$$

这儿 ρ 是曲綫 c 的曲率半径，$\mathbf{n}$ 是曲綫 c 的单位主法綫矢量．(2)可以写成为

$$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{\rho}=-\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{m}}{ds}. \tag{3}$$

命 φ 表曲面法矢量 $\mathbf{m}$ 与曲綫主法矢量 $\mathbf{n}$ 的夹角，则得

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=-\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d\mathbf{m}}{ds}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{4}$$

如果給了 $\frac{du}{dv}$ 与 φ，则 ρ 唯一地决定了，因此有

定理 1. 在曲面上某一点具有相同切綫及相同主法綫的曲綫一定有相同的曲率半径．

当 $\varphi=0$ 时，则曲綫的主法綫与曲面的法綫同向，通过法向与 c 的切向作平面，这平面交曲面于曲綫 c_0，曲綫 c 与 c_0 的切綫与主法綫都同向，因而它們的曲率半径也都相等．c_0 是平面曲綫，这样的曲綫称为法截綫，就是通过曲面的法向做平面所截出的曲綫．

因此主法綫与曲面法綫同向的曲綫的曲率的研究，一变而为法截綫的曲率的研究了(定理 1)．

过法綫的平面有无穷多，因而法截綫也有无穷多．在曲面的切面上給与任何一个切綫方向，我們可以截出一条法截綫来，也就是給了 $\frac{du}{dv}$，就有一条法截綫．

但这样做出的法截綫的主法綫方向，可能与 **m** 同向，也可能与 **m** 反向，也就是 $\varphi = 0$ 或 π，即 $\cos\varphi = \pm 1$.

曲面 S 上的任何一条曲綫 c，其上一点 M，过点 M，切曲綫 c 的法截綫 c_0 称为对应于 c 的法截綫. ρ 是 c 的曲率半径，R 是 c_0 的曲率半径，由于切向相同，即 $\frac{du}{dv}$ 的数值相同，所以

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{\pm 1}{R}, \quad \rho = \pm R\cos\varphi. \tag{5}$$

这儿 φ 是曲綫 c 的主法綫与曲面法綫的夹角. 因此得

定理 2. (Meusnier). 曲面上任何曲綫在某点的曲率半径等于对应的法截綫在这点的曲率半径乘以曲面的法綫与曲綫的主法綫之間的夹角的余弦.

定理也可以敘述为

曲面上任何曲綫的曲率半径等于在曲面的法綫上所截取的对应的法截綫的曲率半径在这曲綫的主法綫上的投影.

例. 以球面为例，法截綫是大圓. 命 c 是球面上的任意圓，公式(2)变为两个圓半径的关系. 这显然是正确的.

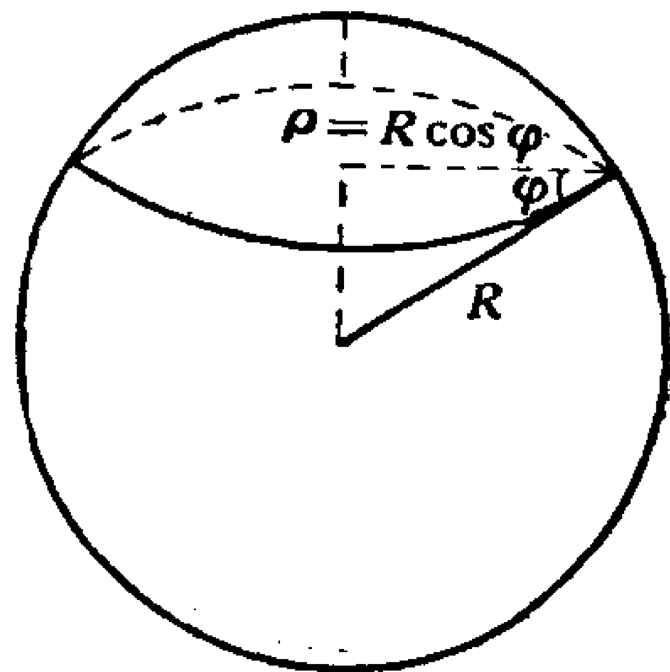


图 106

由 Meusnier 定理，曲面上曲綫的曲率的研究，化为过这定点曲面上法截綫的曲率的研究.

法截綫的曲率等于

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{6}$$

但必須加以解釋，如果右边为正，則法截綫的主法綫与 **m** 的方向相同，曲率半径等于 R；如果右边为負，則方向相反，曲率半径等于 $-R$.

§5. 点的分类

由公式 (4.6) 可知，給了比值 $\frac{du}{dv}$，曲率 $\frac{1}{R}$ 就唯一地确定了. 我們有三种情况:

1. 如果在 M 点 $M^2 - LN < 0$，則所有的法截綫的曲率 $\frac{1}{R}$ 都有相同的符号，也就是說，所有的法截綫的主法綫方向在曲面的同一側. 这样的点称为椭圓性点.

2. 如果在 M 点 $M^2 - LN > 0$，則曲率 $\frac{1}{R}$ 可以不同号，有时与法向同側，有时异側. 这样的点称为双曲性点.

3. 如果 $M^2 - LN = 0$，則 §4.(6) 的分子为一完全平方乘以 N（或 L），曲率不变号，但有某一法截綫曲率为 0. 这样的点称为抛物性点. 严格地說，$L = M = N = 0$ 的点必須除外，这样的点称为凝聚点.

注意，在椭圓性点，$\frac{1}{R}$ 决不为 0，而其他两种情况都有使 $\frac{1}{R}$ 为 0 的方向存在. 它就是

二次多項式 $Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2$ 的实根.

例(旋轉曲面). 在 (ξ, η) 平面上有一条曲綫 c:

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t).$$

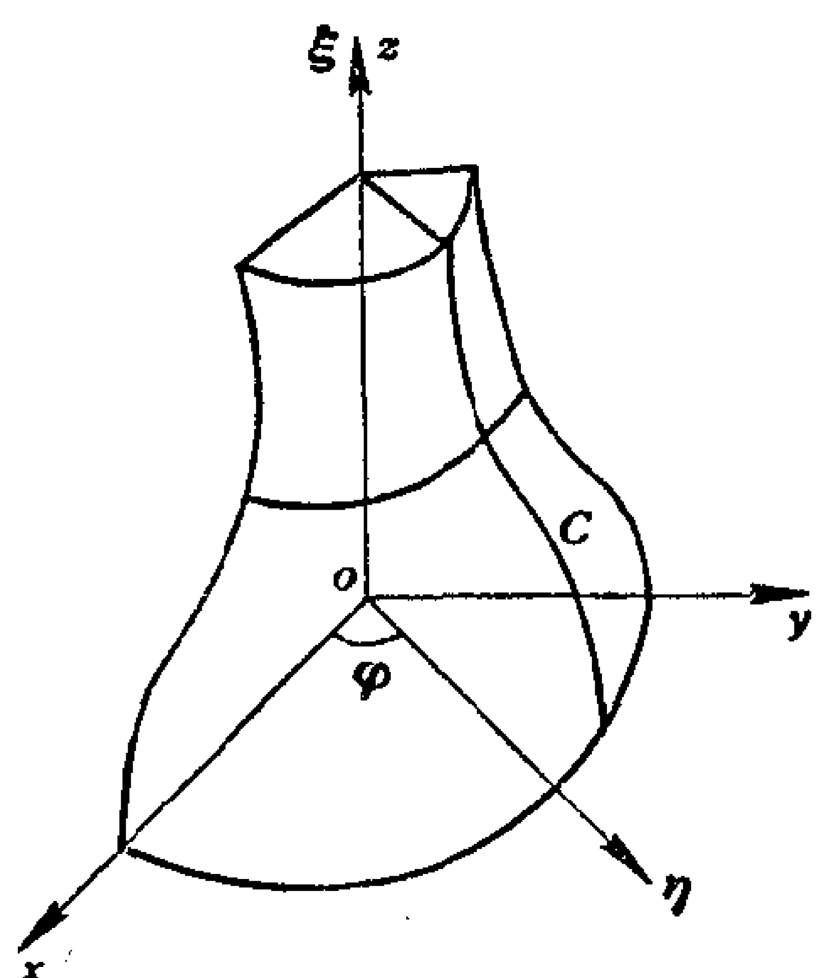


图 107

把 $o\xi$ 軸做为 z 軸, 曲綫 c 繞 z 軸旋轉, 得出来的曲面称为旋轉面, 而 z 軸称为旋轉軸, 显然有

$$z = \xi(t), \quad x^2 + y^2 = \eta^2(t).$$

参变数表达式是

$$\mathbf{r} = (\eta\cos\varphi, \ \eta\sin\varphi, \ \xi),$$

由此得

$$d\mathbf{r} = (\eta'\cos\varphi, \eta'\sin\varphi, \xi')dt + \\ + (-\eta\sin\varphi, \eta\cos\varphi, 0)d\varphi,$$

$$d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \eta^2 d\varphi^2 + (\eta'^2 + \xi'^2)dt^2,$$

即

$$E = \eta^2, \quad F = 0, \quad G = \eta'^2 + \xi'^2.$$

又作

$$\mathbf{r}_{tt} = (\eta''\cos\varphi, \eta''\sin\varphi, \xi''), \quad \mathbf{r}_{t\varphi} = (-\eta'\sin\varphi, \eta'\cos\varphi, 0),$$

$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi} = (-\eta\cos\varphi, -\eta\sin\varphi, 0),$$

推得第二微分型

$$\frac{(\eta'\xi'' - \xi'\eta'')dt^2 + \eta\xi' d\varphi^2}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}.$$

因此

$$LN - M^2 = (\eta'\xi'' - \xi'\eta'')\eta\xi'.$$

現在来看旋轉面上点的类别, 取显示表达式 $\eta = f(\xi)$, 则得

$$LN - M^2 = -f''(\xi)f(\xi).$$

假定曲綫都在 $\eta > 0$ 的一方, 即 $f(\xi) > 0$, 如此則 $M^2 - LN$ 与 $f''(\xi)$ 同号, 也就是当 $f''(\xi) < 0, \ > 0, \ = 0$ 时各为椭圓, 双曲, 抛物性点, 也就是如果曲綫凹向着旋轉軸时, 得椭圓性点. 几何上看来也是直覚的, 因为这时候, 切面在旋轉体之外.

曲綫凸向着旋轉軸时, 得双曲性点. 从几何上看来, 曲綫的切綫方向在体內, 而这点經旋轉所成的圓的切綫方向則在体外, 因此有內有外.

曲綫的扭轉点是曲面的抛物性点.

§6. 曲 率 綫

从法截綫的曲率公式出发,

$$\frac{1}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2}. \tag{1}$$

由 §1.4, 有两个方向 (d_1u, d_1v) 及 (d_2u, d_2v) 存在, 使 $\frac{1}{R}$ 取 $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, 而且

$$\frac{1}{R_2} \leqslant \frac{Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2} \leqslant \frac{1}{R_1}, \tag{2}$$

这儿 R_1, R_2 是方程

$$(LN-M^2)R^2+(2FM-EN-GL)R+(EG-F^2)=0 \tag{3}$$

的二根,而 (d_1u, d_1v), (d_2u, d_2v) 是

$$(EM-FL)du^2+(EN-GL)dudv+(FN-GM)dv^2=0 \tag{4}$$

的二个解. 但需注意,如果

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G},$$

则任意方向 (du, dv) 都是(4)式的解. 这时由式(2)可知 $R_1=R_2$. 这样的点称为圆点. 我們可以証明,处处是圆点的曲面,一定是球面(这儿不証). 在今后的討論中,把圆点除外. (4)的根不会重迭的,其原因是,由(1.11),(1.12)得

$$\frac{d_1u}{d_1v}=-\frac{F-R_1M}{E-R_1L}, \quad \frac{d_2u}{d_2v}=-\frac{F-R_2M}{E-R_2L}. \tag{5}$$

如果相等,则 $R_1=R_2$, 即是圆点了.

由 (d_1u, d_1v), (d_2u, d_2v) 所定义出来的两个矢量

$$(\mathbf{r}_u d_1u+\mathbf{r}_v d_1v), \quad (\mathbf{r}_u d_2u+\mathbf{r}_v d_2v)$$

是互相正交的,其理由是

$$(\mathbf{r}_u d_1u+\mathbf{r}_v d_1v)\cdot(\mathbf{r}_u d_2u+\mathbf{r}_v d_2v)=E d_1u\, d_2u+F(d_1u\, d_2v+d_2u\, d_1v)+G d_1v\, d_2v.$$

由(1.17)可知此式为0.

方向(5)称为主方向, $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ 称为主曲率,又 R_1, R_2 称为主曲率半径. 由(5)所定义的两族曲綫称为曲率綫,在曲面上成正交坐标网.

如果把它們作为坐标綫, 则 $F=0$; 如果 $u=c_1$, $v=c_2$ 是曲率綫,它一定适合微分方程(4),即得

$$EM=GM=0.$$

但 $EG>0$, 因此 $M=0$.

反之,如果 $F=M=0$, 则方程(4)变为

$$du\,dv=0.$$

因而 $u=c_1$, $v=c_2$ 是曲率綫,因得

定理 3. 坐标网是曲率网的必要且充分条件是: 在整个曲面上, Gauss 的两个二次型缺中間項,即 $F=M=0$.

現在

$$M^2-LN=-\frac{EG}{R_1R_2},$$

由于 $EG>0$, 因此得

在椭圆性点处, R_1 与 R_2 同号, 但在双曲性点处, R_1 与 R_2 异号. 由 $\frac{1}{R_1}$ 变到 $\frac{1}{R_2}$ 必定經过0值, 这时候所对应的方向称为漸近方向. 对应于漸近方向的曲率为0, 曲率半径

为∞.

定义. 两曲率的乘积

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}$$

称为 Gauss 曲率,而其和的平均数

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

称为曲率中值.

由(3)可知,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{6}$$

例 1. 扁迴旋椭圓面的方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

的参数表达式是

$$x = a\cos u \sin v, \quad y = a\sin u \sin v, \quad z = c\cos v.$$

不难得出

$$E = a^2\sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2\cos^2 v + c^2\sin^2 v,$$

$$L = \frac{ac\sin^2 v}{\sqrt{a^2\cos^2 v + c^2\sin^2 v}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{ac}{\sqrt{a^2\cos^2 v + c^2\sin^2 v}}.$$

由于 $F = M = 0$,所以 $u =$ 常数,$v =$ 常数都是曲率綫. 实質上,由于(7)是迴旋面,它的經綫 ($v = c_1$),緯綫 ($u = c_2$) 是曲率綫,因而 $F = M = 0$,可不待計算而知之. 而 Gauss 曲率

$$K = \frac{1}{R_1R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{c^2}{(a^2\cos^2 v + c^2\sin^2 v)^2}.$$

例 2. 二次錐面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

的显示式

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

不难求得

$$p = \frac{c^2x}{a^2z}, \quad q = \frac{c^2y}{b^2z}, \quad r = \frac{c^4y^2}{a^2b^2z^3}, \quad s = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \quad t = \frac{c^4x^2}{a^2b^2z^3}.$$

由于 $rt - s^2 = 0$,所以所有的点都是抛物点,并且有一个主曲率半径等于 ∞. 显然,对应的主方向与錐面的母直綫重合.

§7. Euler 公式

假定我們已經以曲率綫网为坐标网,则

$$\frac{1}{R} = \frac{Ldu^2 + Ndv^2}{Edu^2 + Gdv^2}. \tag{1}$$

取 $v = c_2$ 得主曲率

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}.$$

取 $u = c_1$ 得

$$\frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}.$$

因此

$$\frac{Ldu^2 + Ndv^2}{Edu^2 + Gdv^2} = \frac{1}{R_1}\frac{Edu^2}{Edu^2 + Gdv^2} + \frac{1}{R_2}\frac{Gdv^2}{Edu^2 + Gdv^2}.$$

命 θ 是方向 dv/du 与曲率綫 $v = c_2$ 的交角，則

$$\frac{Edu^2}{Edu^2 + Gdv^2} = \cos^2\theta, \quad \frac{Gdv^2}{Edu^2 + Gdv^2} = \sin^2\theta.$$

因而得出 Euler 公式

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}. \tag{2}$$

因此得

定理 4. 在曲面上每一点的切面存在有两个相互垂直的方向，在这两个方向，曲率 $\frac{1}{R}$ 达到最大与最小值，并且 $\frac{1}{R_1}$ 与 $\frac{1}{R_2}$ 就是对应于这两个方向的曲率值. 任何法截綫的曲率可以由 Euler 公式(2)表之，其中 θ 是法截綫的切綫与給出曲率 $\frac{1}{R_1}$ 的方向所作成的角度.

§8. Olinde Rodrigues 公式

在空間具有一个参变数的直綫族一般沒有包絡，也就是說，不一定有一条曲綫(即所說的包絡)以这些直綫为切綫. 在曲面 s 上任取一曲綫 c，在 c 上每一点做曲面 s 的法綫，法綫也成一直綫族，这样的直綫族不一定有包絡. 問題：怎样的 c，其上各点作曲面的法綫，这法綫族有包絡. 回答是，必要且充分条件是 c 为曲率綫.

假定包絡是 c_1，用 $\mathbf{r}$ 表 c 的矢径，而 $\mathbf{r}_1$ 表 c_1 的矢径，M 表示 c 上的一点. 作法綫，这法綫与 c_1 的切点是 M_1. 命 MM_1 的长度等于 a，如此則得

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + a\mathbf{m}, \tag{1}$$

这儿 $\mathbf{m}$ 是单位法向矢量.

c_1 如果是法綫的包絡，則它的切綫方向一定与 $\mathbf{m}$ 平行，即 $d\mathbf{r}_1 = b\mathbf{m}$，此处 b 是一数量. 由(1)求微商得

$$b\mathbf{m} = d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r} + ad\mathbf{m} + (da)\mathbf{m},$$

即

$$d\mathbf{r} + ad\mathbf{m} = e\mathbf{m},$$

这儿 e 是某一数量. 与 $\mathbf{m}$ 求数量积，得

$$e = d\mathbf{r}\cdot\mathbf{m} + ad\mathbf{m}\cdot\mathbf{m},$$

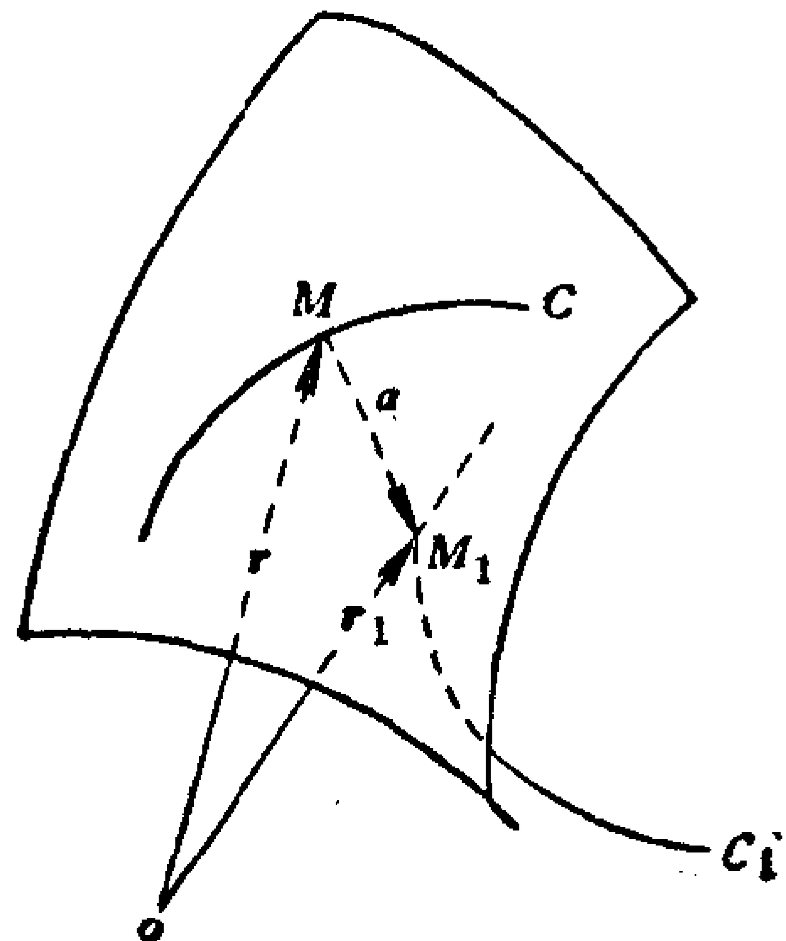


图 108

切矢量 $d\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{m}$ 正交，单位矢量 $\mathbf{m}$ 与其微分矢量 $d\mathbf{m}$ 正交，因此 $e=0$. 即得

$$d\mathbf{r}+a d\mathbf{m}=0. \tag{3}$$

所以，如果所考虑的包絡存在，則(3)一定成立；反之，如果沿 c，(3)式成立，則由(1)确定一条曲綫 c_1，微分之，得 $d\mathbf{r}_1=d\mathbf{r}+a d\mathbf{m}+(da)\mathbf{m}=(da)\mathbf{m}$. 也就是 $\mathbf{m}$ 与 c_1 的切向平行，因此沿 c 的曲面法綫是 c_1 的切綫. 因此公式(3)是曲綫 c 上曲面法綫具有包絡的必要且充分的条件，注意，包絡可以蜕化为一个点，那时法綫成錐面或柱面，但(3)式仍然成立.

我們現在进一步算出(3)式中的 a 就是主曲率半径之一.

展开(3)式得

$$\mathbf{r}_u du+\mathbf{r}_v dv+a(\mathbf{m}_u du+\mathbf{m}_v dv)=0. \tag{4}$$

与矢量 $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ 求內积得

$$\left.\begin{aligned} E du+F dv+a(-L du-M dv)=0,\\ F du+G dv+a(-M du-N dv)=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

消去 du, dv 得

$$(LN-M^2)a^2+(2FM-EN-GL)a+EG-F^2=0,$$

这就是(6.3). 因此 a 是 R_1, R_2 之一. 因此

$$d\mathbf{m}=-\frac{1}{R}d\mathbf{r}. \tag{6}$$

这称为 Olinde Rodrigues 公式，由(5)确定出来的方向是主方向.

定理 5. 曲面的曲率綫上每点作曲面的法綫，这些法綫有一包絡，界于曲面与包絡之間的法綫的长度等于主曲率半径之一.

某一平面曲綫繞着位于这平面上一直綫旋轉所产生的曲面的曲率綫就是它的經綫与緯綫. 緯綫是指这曲綫上一点的軌迹，其上的曲面法綫成一錐面，其頂点就是平面曲綫的法綫与軸的交点. 而經綫是指过軸平面所截出的綫，法綫在一平面上，所以有包絡，这与定理 5 所論証的結論相同.

§9. Dupin 定理

在空間有三族互相垂直的曲面：

$$\varphi(x,y,z)=q_1,\quad \psi(x,y,z)=q_2,\quad \omega(x,y,z)=q_3, \tag{1}$$

它們形成空間的一个正交曲面坐标网，也就是可以解出成为

$$x=\varphi_1(q_1,q_2,q_3),\quad y=\psi_1(q_1,q_2,q_3),\quad z=\omega_1(q_1,q_2,q_3). \tag{2}$$

沿坐标綫的切綫矢量各为

$$\mathbf{r}_{q_1},\ \mathbf{r}_{q_2},\ \mathbf{r}_{q_3}. \tag{3}$$

正交的条件可以写成为

$$\mathbf{r}_{q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_3}=0,\quad \mathbf{r}_{q_3}\cdot\mathbf{r}_{q_1}=0,\quad \mathbf{r}_{q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_2}=0. \tag{4}$$

第一式对 q_1 求微商，第二式对 q_2 求微商，第三式对 q_3 求微商，得

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_3}+\mathbf{r}_{q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_1q_3}=0,\\ \mathbf{r}_{q_2q_3}\cdot\mathbf{r}_{q_1}+\mathbf{r}_{q_3}\cdot\mathbf{r}_{q_1q_2}=0,\\ \mathbf{r}_{q_1q_3}\cdot\mathbf{r}_{q_2}+\mathbf{r}_{q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_2q_3}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

三式总加，減第一、第二、第三式得

$$\mathbf{r}_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_3}=\mathbf{r}_{q_2q_3}\cdot\mathbf{r}_{q_1}=\mathbf{r}_{q_3q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_2}=0. \tag{6}$$

由(4)及(6)得

$$\mathbf{r}_{q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_3}=\mathbf{r}_{q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_3}=\mathbf{r}_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_3}=0.$$

可知，$\mathbf{r}_{q_1}$, $\mathbf{r}_{q_2}$, $\mathbf{r}_{q_1q_2}$ 都垂直于 $\mathbf{r}_{q_3}$. 因而在同一平面上卽得

$$\mathbf{r}_{q_1q_2}\cdot(\mathbf{r}_{q_1}\times\mathbf{r}_{q_2})=0. \tag{7}$$

現在考虑曲面 $q_3=$ 常数，而 q_1, q_2 作为参变量，得

$$F=\mathbf{r}_{q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_2}=0,\quad M=\frac{\mathbf{r}_{q_1q_2}\cdot(\mathbf{r}_{q_1}\times\mathbf{r}_{q_2})}{\sqrt{EG-F^2}}=0.$$

因此坐标綫 q_1 与 q_2 是曲面 $q_3=$ 常数的曲率綫，因此得

定理 6 (Dupin). 如果空間有三族互相正交的曲面，在不同的两族中的任何两个曲面的交綫是这两个曲面的曲率綫.

例. 椭球坐标. 考虑含参数 ρ 的二次曲面：

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1,\qquad a^2>b^2>c^2. \tag{8}$$

对一固定的点 $M(x, y, z)$，得出 ρ 的三次方程. 不难証明，有三个实根 u, v, w，而且适合于

$$\infty>u>-c^2,\quad -c^2>v>-b^2,\quad -b^2>w>-a^2. \tag{9}$$

这样三个数 (u, v, w) 称为点 $M(x, y, z)$ 的椭球坐标. 以上討論，我們假定 x, y, z 中无一为 0. 不然，(2)化为 ρ 的二次方程了.

我們研究椭球坐标系中的坐标曲面，以 u 代 ρ，則得椭球面：

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1. \tag{10}$$

以 v 代 ρ 得单叶双曲面：

$$\frac{x^2}{a^2+v}+\frac{y^2}{b^2+v}+\frac{z^2}{c^2+v}=1,\qquad \begin{pmatrix}c^2+v<0.\\ a^2+v>0,\ b^2+v>0.\end{pmatrix} \tag{11}$$

以 ω 代 ρ 得双叶双曲面：

$$\frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y^2}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}=1,\qquad \begin{pmatrix}b^2+w<0,\ c^2+w<0\\ a^2+w>0.\end{pmatrix} \tag{12}$$

現在証明(10)，(11)，(12)正交，曲面(10)，(11)的法綫方向，各为

$$\frac{x}{a^2+u},\ \frac{y}{b^2+u},\ \frac{z}{c^2+u};\qquad \frac{x}{a^2+v},\ \frac{y}{b^2+v},\ \frac{z}{c^2+v}.$$

两法向的夹角余弦之分子等于

$$\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)}+\frac{y^2}{(b^2+u)(b^2+v)}+\frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}=$$

$$=\frac{1}{v-u}\left(\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-\frac{x^2}{a^2+v}-\frac{y^2}{b^2+v}-\frac{z^2}{c^2+v}\right)=0.$$

故得所証.

§ 10. Gauss 曲率的几何意义

把法綫单位矢量的始点移到坐标中心，其末端 M^* 就在以原点为中心的单位球面上．当 M 在曲面 s 上移动，M^* 便在球面上移动，这样的表达方法，称为曲面的球面写象． M^* 的位置由 u, v 唯一决定．

在球面上 M^* 点的参数表达式是 $\mathbf{m} = \mathbf{m}(u, v)$，因此球面的 Gauss 第一微分型等于

$$d\mathbf{m}\cdot d\mathbf{m} = E_0du^2 + 2F_0du\,dv + G_0dv^2, \tag{1}$$

此处

$$E_0 = \mathbf{m}_u\cdot\mathbf{m}_u, \quad F_0 = \mathbf{m}_u\cdot\mathbf{m}_v, \quad G_0 = \mathbf{m}_v\cdot\mathbf{m}_v.$$

其面积元素等于

$$dS_0 = \sqrt{E_0G_0 - F_0^2}\,du\,dv. \tag{2}$$

微分型(1)也称为原曲面的 Gauss 第三微分型．

引用 §1. 3)，取

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_u, \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}_v, \quad \mathbf{c} = \mathbf{m}_u, \quad \mathbf{d} = \mathbf{m}_v.$$

首先由于 $\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m} = 0$，得

$$0 = (\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m})_v = \mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{m} + \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}_v,$$

即得 $\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}_v = \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{m}_u = -\mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{m}$，即 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$．再由 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$ 可知，$\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}_u = \mathbf{m}\cdot\mathbf{m}_v = 0$，即 $\mathbf{m}$ 垂直于 $\mathbf{m}_u$, $\mathbf{m}_v$．故 $\mathbf{m}_u \times \mathbf{m}_v$ 与 $\mathbf{m}$ 平行，故与 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 平行，因此 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ 平行．故由 §1, 3)，得

$$(LN - M^2)^2 = (EG - F^2)(E_0G_0 - F_0^2).$$

由此推得

$$K = \sqrt{\frac{E_0G_0 - F_0^2}{EG - F^2}}, \tag{3}$$

也就是

$$dS_0 = KdS.$$

因此有

定理 7. Gauss 曲率的絕对值等于曲面一点的面积元素与其球面映像的对应点的面积元素之比．

非常值得注意的事实是：Gauss 曲率的表达式

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

仅依赖于第一微分型，而不依赖于第二微分型，切实些說，我們有恆等式

$$4(EG - F^2)\,(LN - M^2) = \frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{\partial G}{\partial u}.$$

要証明这个恆等式并不难．例如，取显示式，这恆等式就是

$$4pq(rt - s^2) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + p^2)\frac{\partial}{\partial y}(1 + q^2) - \frac{\partial}{\partial y}(1 + p^2)\frac{\partial}{\partial x}(1 + q^2),$$

而这是显然的．

因此，Gauss 曲率可以仅用 E，F，G 及其对 u, v 的微商表达出来。这是一个深刻的內在的現象。这是发現 Riemann 几何的原始根源之一。所謂 Riemann 几何者，乃是从一个微分二次型出发，研究与之有关的几何性质的学問也。結合現在的情况来說，那些几何現象只与 E，G，F 有关，在曲面論的研究中，就是曲面互相可展的性質。

§ 11. 曲率中值的几何意义

在曲面 s：

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$$

上任一点 M 处，沿法向 $\mathbf{m}$ 截一段长为 $n(n=n(u, v))$ 的綫段 MM_1，M_1 画一新曲面 s_1，其間的关系是

$$\mathbf{r}^{(1)}=\mathbf{r}+n\mathbf{m}. \tag{1}$$

对 u，v 求微商得

$$\mathbf{r}_u^{(1)}=\mathbf{r}_u+n_u\mathbf{m}+n\mathbf{m}_u, \quad \mathbf{r}_v^{(1)}=\mathbf{r}_v+n_v\mathbf{m}+n\mathbf{m}_v.$$

s_1 的 Gauss 第一微分型的系数是 E_1，F_1，G_1. 假定 $n=n(u, v)$ 及 n_u，n_v 都很小，可以略去二次項，則得

$$E_1=\mathbf{r}_u^{(1)}\cdot\mathbf{r}_u^{(1)}=(\mathbf{r}_u+n_u\mathbf{m}+n\mathbf{m}_u)\cdot(\mathbf{r}_u+n_u\mathbf{m}+n\mathbf{m}_u)=$$

$$=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u+2n_u(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m})+2n(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}_u).$$

由 $\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}=0$ 推得

$$E_1=E-2nL.$$

同理，不难得到

$$F_1=F-2nM, \quad G_1=G-2nN.$$

由此推得

$$E_1G_1-F_1^2=EG-F^2-2n(EN-2FM+GL).$$

仍然略去高阶項.

由于曲率中值等于

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)},$$

所以

$$E_1G_1-F_1^2=(EG-F^2)\ (1-4nH).$$

开平方，依二項式定理展开 $(1-4nH)^{\frac{1}{2}}$，并略去高次項得

$$\sqrt{E_1G_1-F_1^2}=\sqrt{EG-F^2}\quad(1-2nH).$$

乘以 $du\cdot dv$ 并积分，得到曲面 s 与曲面 s_1 很近时，面积的差額

$$\iint\limits_{(s_1)}\sqrt{E_1G_1-F_1^2}\,du\,dv-\iint\limits_{(s)}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=-\iint\limits_{(s)}2nH\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

即

$$\delta S=-\iint\limits_{(s)}2nHdS. \tag{2}$$

这个公式可直接联系于著名的 Plato 問題："給已知的界綫 L，求以 L 为边界的面积

最小的曲面”. 現在去証明,在这样曲面上曲率中値应当等于0”.

如果在曲面上有某一块 σ, 其上 $H>0$, 选择 n,使其在 σ 上是正的,而曲面上其余部分等于0,則

$$\delta s=-\iint_{(\sigma)}2nHds<0,$$

即以 L 为周界的曲面 s_1 的面积小于 s 的面积, 与假定相违背. 如果有一块其上 $H<0$, 則选 n、使在 σ 上为負,而其余部分为0. 同样, s 的面积不是最小,因此

曲率中値等于0的曲面称为最小曲面.

§12. 活动标架

假定已經取了正交坐标綫,也就是假定了 $F=0$,即

$$\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u=E,\quad \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v=0,\quad \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v=G,$$

$$\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}_u=-L,\quad \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}_v+\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{m}_u=-M,\quad \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{m}_v=-N.$$

三单位矢量:

$$\mathbf{m},\quad \mathbf{t}_1=\frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}},\qquad \mathbf{t}_2=\frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}.$$

称为活动标架. 活动标架是互相正交的三个单位矢量. 每一点有一个活动标架, 任何一个矢量都可以分解为这三坐标矢量的和,如 Frenet-Serret 公式一样我們可以研究这三坐标矢量对 u, 对 v 的微商对这三坐标矢量的分解式.

由于正交及单位性质,我們知道

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}_1}{dv}&=\qquad\quad q\mathbf{t}_2+s_1\mathbf{m},\\ \frac{d\mathbf{t}_2}{dv}&=-q\mathbf{t}_1\qquad+s_2\mathbf{m},\\ \frac{d\mathbf{m}}{dv}&=-s_1\mathbf{t}_1-s_2\mathbf{t}_2\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

及

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}_1}{du}&=\qquad\quad p\mathbf{t}_2+r_1\mathbf{m},\\ \frac{d\mathbf{t}_2}{du}&=-p\mathbf{t}_1\qquad+r_2\mathbf{m},\\ \frac{d\mathbf{m}}{du}&=-r_1\mathbf{t}_1-r_2\mathbf{t}_2.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

現在定出 p, q, r_1, r_2, s_1, s_2, 首先(1)中第一式与矢量 $\mathbf{t}_2$ 作內积,得

$$q=\mathbf{t}_2\cdot\mathbf{t}_{1v}.$$

由于

$$\mathbf{t}_{1v}=\left(\frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}\right)_v=\frac{\mathbf{r}_{uv}}{\sqrt{E}}+\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)_v\mathbf{r}_u,$$

$\mathbf{r}_u$ 与 $\mathbf{t}_2$ 正交，所以

$$q=\frac{\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_{uv}}{\sqrt{EG}}=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v)=\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}. \tag{3}$$

同法，

$$p=-\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}. \tag{4}$$

又

$$r_1=\left(\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{t}_1\right)\cdot\mathbf{m}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}\right)\cdot\mathbf{m}=\frac{\mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{m}}{\sqrt{E}}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}=\frac{L}{\sqrt{E}}.$$

同法得

$$r_1=\frac{L}{\sqrt{E}},\quad r_2=\frac{M}{\sqrt{G}},\quad s_1=\frac{M}{\sqrt{E}},\quad s_2=\frac{N}{\sqrt{G}}.$$

即得

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}_{1u}&=&&-\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\mathbf{t}_2+\frac{L}{\sqrt{E}}\mathbf{m},\\ \mathbf{t}_{2u}&=\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\mathbf{t}_1&&+\frac{M}{\sqrt{G}}\mathbf{m},\\ \mathbf{m}_u&=-\frac{L}{\sqrt{E}}\mathbf{t}_1&&-\frac{M}{\sqrt{G}}\mathbf{t}_2\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

及

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}_{1v}&=&&\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\mathbf{t}_2+\frac{M}{\sqrt{E}}\mathbf{m},\\ \mathbf{t}_{2v}&=-\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\mathbf{t}_1&&+\frac{N}{\sqrt{G}}\mathbf{m},\\ \mathbf{m}_v&=-\frac{M}{\sqrt{E}}\mathbf{t}_1&&-\frac{N}{\sqrt{G}}\mathbf{t}_2.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

命

$$\omega=p\,du+q\,dv,\quad \omega_1=r_1du+s_1dv,\quad \omega_2=r_2du+s_2dv,$$

则活动标架的全微分表示形式有

$$\left.\begin{aligned}d\mathbf{t}_1&=&&-\omega\mathbf{t}_2+\omega_1\mathbf{m},\\ d\mathbf{t}_2&=-\omega\mathbf{t}_1&&+\omega_2\mathbf{m},\\ d\mathbf{m}&=-\omega_1\mathbf{t}_1&&-\omega_2\mathbf{t}_2,\end{aligned}\right\}$$

这儿

$$\omega=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_vdu-G_udv),\quad \omega_1=\frac{L}{\sqrt{E}}du+\frac{M}{\sqrt{E}}dv,\ \omega_2=\frac{M}{\sqrt{G}}du+\frac{N}{\sqrt{G}}dv.$$

附記． 如果有对应关系的二曲面为

$$s:\qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),$$
$$s_1:\qquad \mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(u,v),$$

并且如果它們有相同的第一、第二微分二次型，那末它們所对应的活动标架适合相同的微分方程(5)与(6)．从曲綫論中处理 Frenet-Serret 公式的方法出发，我們能够証明，經过平移、旋轉可以把 s 与 s_1 互变．

更本質的問題是：寻求条件判断任何二曲面能否經平移，旋轉互变，也就是在变形

$$u_1=\varphi(u,v),\quad v_1=\psi(u,v)$$

下一对二次型

$$Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2, \quad Ldu^2 + 2Mdu\, dv + Ndv^2$$

是否能同时变为另一对：

$$E_1du_1^2 + 2F_1du_1\, dv_1 + G_1dv_1^2, \quad L_1du_1^2 + 2M_1du_1\, dv_1 + N_1dv_1^2$$

的問題。本书不作答复。

§13. 曲面的可展性

平放着的紅旗象征着一个平面，而一面迎风飘揚的紅旗，在每一时刻，就是一个曲面。两个曲面具有这样的关系，称为互相可展关系。确切些說：

如果有二曲面 s 与 s_1，其間建立了以下的点点对应关系：由参变数 u, v 定义

$$s: \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v),$$

$$s_1: \qquad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u, v).$$

当 u, v 取值时 s, s_1 上各有一点 M、M_1，它們称为对应点。当

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t)$$

时，s, s_1 上各画一条曲綫。如果对应曲綫段的长度相等时，这两曲面称为彼此可展，也就是说，s 与 s_1 所定义的第一微分式的系数互等，即

$$E = E_1, \quad F = F_1, \quad G = G_1.$$

上节的結果說明了，可展曲面的 Gauss 曲率相等。

关于可展曲面的本質問題是：給了两个曲面，我們是否可以引进合适的参变数，使它們成为可展关系；或者这样說，給了两个微分二次型

$$E(u, v)du^2 + 2F(u, v)du\, dv + G(u, v)dv^2$$

及

$$E_1(u_1, v_1)du_1^2 + 2F_1(u_1, v_1)du_1\, dv_1 + G_1(u_1, v_1)dv_1^2,$$

我們能否找到一变形：

$$u_1 = \varphi(u, v), \quad v_1 = \psi(u, v),$$

把其一变为其他。

现在，我們不深入討論这一問題。

§14. 曲面族与偏微分方程

从一个一級常微分方程

$$\phi(x, y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

可以解得

$$f(x, y, c) = 0. \tag{2}$$

这代表一个曲綫族。

反之，从一个曲綫族(2)，求微商得

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p = 0, \tag{3}$$

与(2). 消去 c, 即得原来的微分方程(1). 不仅如此, 如果把 c 也看成 x 的函数, 则微商(2)得

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}p+\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0. \tag{4}$$

如果

$$\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0, \tag{5}$$

则(4)与(3)完全一致,因此也得出同样的微分方程(1)来.

(5)說明

$$\frac{dc}{dx}=0 \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial c}=0.$$

第一式說明 c 是常数,这就是曲綫族. 第二式与(2)联立,消去 c, 即得曲綫族(2)的包絡,也得出方程(1)的奇异解.

我們現在試将这个处理方法推广到曲面的情形,即考虑一个有二参变数的曲面族

$$f(x, y, z; a, b)=0. \tag{6}$$

命

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

则由(6)及

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

消去 a、b. 可得一个偏微分方程:

$$\phi(x, y, z, p, q)=0. \tag{8}$$

如果把 a, b 也看成 x, y 的函数,则得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

与(7)相比較,如果

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

则(9)与(7)完全一样. 因而也适合于偏微分方程(8),从(10)可以解得

$$J\frac{\partial f}{\partial a}=0,\quad J\frac{\partial f}{\partial b}=0,$$

这儿

$$J=\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}.$$

如果 $J\neq 0$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial b}=0, \tag{11}$$

也就是函数 f 与 a,b 无关. 如果

$$J=0,$$

这說明 a 与 b 是函数相关的, 也就是 $b=\varphi(a)$, φ 是任意函数. 代入(6)式,对 a 微分得出

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a)=0. \tag{12}$$

(6)与(12)联立仍得一解.

因此偏微分方程(8),既可能有(6)作为解答,称为完全解;也可以从(6)与(11)中消去 a, b 而得出解答,称为奇异解. 更可以引进一个任意函数 $a=\varphi(b)$, 由 (6) 及 (12)消去 a, 也得一解答, 称为一般解.

几何的說法是:完全解定义一族有两个参数的曲面族,而奇异解是其包絡面. 在曲面族中,任取一个一参数的分族,而分族的包絡是一般解.

例 1. 考虑与原点距离为 1 的平面族:

$$ax+by+cz=(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}=1. \tag{13}$$

由

$$a+cp=0,\qquad b+cq=0$$

可知,这曲面族适合于偏微分方程:

$$(xp+yq-z)^2=1+p^2+q^2. \tag{14}$$

(13)当然是(14)的完全解. 曲面族(13)的包絡是单位球

$$x^2+y^2+z^2=1. \tag{15}$$

这是奇异解,而球面上的一点只与(13)中的一个平面相切.

一般解可由

$$ax+y\varphi(a)+z[1-a^2-\varphi^2(a)]^{\frac{1}{2}}=1 \tag{16}$$

及

$$x+y\varphi'(a)-z\frac{a+\varphi(a)\varphi'(a)}{(1-a^2-\varphi^2(a))^{1/2}}=0 \tag{17}$$

得知,这儿 $\varphi(a)$ 是任意一个函数,这是平面族(16)的包絡. 对应一个 a, 代表一条直綫. 因此(16),(17)所代表的曲面是由直綫的移动所成的. 在点

$$x=a,\quad y=\varphi(a),\quad z=(1-a^2-\varphi^2(a))^{1/2},$$

(16), (17)重合,即(16),(17)表示切于此点的直綫. 因此球面上一曲綫其上每一点有一切綫,这些切直綫所成的面就是一个一般解. 特别取函数 $\varphi(a)=0$, 則由(16),(17)得

$$\frac{a}{x}=\frac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}{z}=\frac{1}{x^2+z^2}.$$

因而得圓柱

$$x^2+z^2=1.$$

例 2. 方程

$$pq=4xy$$

有完全解

$$z=\frac{1}{a}x^2+ay^2+b.$$

对 a, b 微分得

$$0=-\frac{1}{a^2}x^2+y^2,\quad 0=1.$$

故无奇异解,命 $b=\varphi(a)$, 而一般解是

$$z=\frac{1}{a}x^2+ay^2+\varphi(a),\quad 0=-\frac{1}{a^2}x^2+y^2+\varphi'(a).$$

特别,取 $\varphi(a)=c$ (常数),解得 $a=\frac{x}{y}$, 即一般解的特例.

$$z=2xy+c.$$

例 3. 微分方程

$$px-qy=(z-xy)^2$$

有完全解

$$xe^{\frac{1}{z-xy}}=\frac{xy+a}{xy+b},$$

也有完全解

$$f=\log x+\frac{1}{z-xy}-\log(xy+a)+\log(xy+b)=0.$$

无奇异解.

命 $b=\varphi(a)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-\frac{1}{xy+a}+\frac{b'}{xy+b}=0,\quad \frac{xy+b}{xy+a}=b'.$$

因而

$$\frac{1}{z-xy}=-\log x-\log b',\quad z-xy=\frac{-1}{\log x+\log b'}.$$

如取 $b=\lambda a$, 则 $b'=\lambda$, λ 是常数. 命 $\lambda\to\infty$, 则

$$z-xy=0$$

也是一解.

習題 1. $z=pq$ 有一完全积分是

$$4z=\left(ax+\frac{y}{a}+b\right)^2,$$

問解

$$4z-2xy=(x^2+y^2)\sec\alpha+(x^2-y^2)\operatorname{tg}\alpha$$

是怎样的解?

習題 2. $z=px+qy$ 的一个完全积分是

$$\log z=a\log x+(1-a)\log y+b,$$

問

$$z=y\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

是怎样的解?

習題 3. $z=px+qy+pq$ 的一个完全积分是 $z=ax+by+ab$,

問

$$z+3xy=0$$

是怎样的解?

習題 4. $xp + 2yq = 2\left(z - \frac{x^2}{y}\right)^2$ 有一个完全积分

$$e^{\frac{1}{z-x^2/y}} = a\frac{x^2}{y^2} + \frac{b}{y},$$

問

$$yz = x^2$$

是怎样的解?

習題 5. $3px + qy + q^3x^2 = 0$ 有两个完全解

$$z = a - \frac{1}{3}b^3x + byx^{-\frac{1}{3}}, \quad z = a' + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}(x^2 + 2b'x)^{-\frac{1}{2}},$$

求証其一是另一一般解的特例.

补 充

用张量分析来处理曲面論

我們把已經講过的曲面論用张量分析的符号重新講一下，其目的是較具体地介紹张量分析，为将来正式学习 Riemannian 几何作一准备.

§15. 第一基本型

我們还是用符号

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{1}$$

代表一个曲面. 我們已往的研究,主要是从以下的三个矢量

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{r} \tag{2}$$

及

$$\mathbf{m} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)/|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \tag{3}$$

出发.

我們将符号略加改变，把变数 u, v 改写为 u^1, u^2 (注意,并不是 u 的一次方与二次方). 命

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}\mathbf{r} = \partial_1\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\mathbf{r} = \partial_2\mathbf{r},$$

而

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_j\, du^i\, du^j.$$

我們用 Einstein 約定,把和号略去,以后如果一項中同一指标出現二次,我們約定其意义是对此指标求和. 例如, a_ib^i 就是代表 $a_1b^1 + a_2b^2$. 如此,则可以写成为

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j, \quad g_{ij} = \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_j.$$

用老符号,則有

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F, \quad g_{22} = G.$$

由 g_{ij} 所組成的行列式等于 $EG-F^2$，当然不等于 0，所以有滿足于

$$g^{hi}g_{ji}=\delta_j^h$$

的 g^{hi} 存在，此处

$$\delta_j^h=\begin{cases}0 & 若\ h\neq j,\\ 1 & 若\ h=j.\end{cases}$$

这称为 Kronecker 符号．不难算出

$$g^{11}=\frac{G}{EG-F^2},\quad g^{12}=g^{21}=\frac{-F}{EG-F^2},\quad g^{22}=\frac{E}{EG-F^2}.$$

曲面的切矢量 **a** 可以写成为

$$\mathbf{a}=a^h\mathbf{r}_h,$$

其长度的平方等于

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=(a^h\mathbf{r}_h)\cdot(a^l\mathbf{r}_l)=\mathbf{r}_h\cdot\mathbf{r}_l a^h a^l=g_{hl}a^h a^l.$$

两个矢量 $\mathbf{a}=a^h\mathbf{r}_h$，$\mathbf{b}=b^l\mathbf{r}_l$ 的夾角的余弦等于

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})}}=\frac{g_{ij}a^ib^j}{\sqrt{(g_{ij}a^ia^j)(g_{st}b^sb^t)}}.$$

单位法矢量等于

$$\mathbf{m}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v),$$

这里 $g=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=EG-F^2.$

§ 16. 张　　量

換变数

$$u^i=u^i(u'^1,u'^2),\quad i=1,2. \tag{1}$$

仍用 Einstein 約定不写和号，則显然有

$$du^i=\frac{\partial u^i}{\partial u'^j}du'^j \tag{2}$$

及任一函数 φ 的梯度适合

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}=\frac{\partial u'^j}{\partial u^i}\frac{\partial\varphi}{\partial u'^j}. \tag{3}$$

又如

$$g_{ij}du^i\,du^j=g'_{st}du'^s\,du'^t=g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u'^s}\frac{\partial u^j}{\partial u'^t}du'^s\,du'^t,$$

卽得

$$g'_{st}=g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u'^s}\frac{\partial u^j}{\partial u'^t}. \tag{4}$$

从(2)，(3)，(4)极易推得

$$du'^i=\frac{\partial u'^i}{\partial u^j}du^j,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial u'^i}=\frac{\partial u^j}{\partial u'^i}\frac{\partial\varphi}{\partial u^j}$$

及

$$g_{ij}=g'_{st}\frac{\partial u'^s}{\partial u^i}\frac{\partial u'^t}{\partial u^j}. \tag{4'}$$

现在求証

$$g'^{st}=g^{ij}\frac{\partial u'^s}{\partial u^i}\frac{\partial u'^t}{\partial u^j}. \tag{5}$$

由

$$g^{lk}g_{hk}=\delta^l_h$$

及(4′)得

$$g^{kl}g'_{st}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\frac{\partial u'^t}{\partial u^h}=\delta^l_h.$$

乘以 $\dfrac{\partial u'^j}{\partial u^l}$ 及对 l 加之得

$$g^{kl}g'_{st}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\frac{\partial u'^t}{\partial u^h}\frac{\partial u'^j}{\partial u^l}=\frac{\partial u'^j}{\partial u^h}.$$

由于 $\dfrac{\partial u'^j}{\partial u^h}=\delta^j_t\dfrac{\partial u'^t}{\partial u^h}$，故得

$$\left(g^{kl}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\cdot\frac{\partial u'^j}{\partial u^l}g'_{st}-\delta^j_t\right)\frac{\partial u'^t}{\partial u^h}=0.$$

由于 $\dfrac{\partial(u'^1,u'^2)}{\partial(u^1,u^2)}\neq 0$，所以

$$\left(g^{kl}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\frac{\partial u'^j}{\partial u^l}\right)g'_{st}=\delta^j_t,$$

即

$$g'^{sj}=g^{kl}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\frac{\partial u'^j}{\partial u^l}.$$

这証明了(5)式.

由(2),(3),(4),(5)可以概括出一个概念.

如果有如下的关系:

$$T'^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}=T^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}\frac{\partial u'^{r_1}}{\partial u^{s_1}}\cdots\frac{\partial u'^{r_m}}{\partial u^{s_m}}\frac{\partial u^{q_1}}{\partial u'^{p_1}}\cdots\frac{\partial u^{q_n}}{\partial u'^{p_n}}, \tag{6}$$

T 是 u^1,u^2 的函数，T' 是 u'^1,u'^2 的函数，则 $T^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}$ 称为 m 阶逆变，n 阶协变的张量.

上面的例子說明，矢量 (du^1,du^2) 是一級逆变张量，一函数 φ 的梯度 $\left(\dfrac{\partial}{\partial u^1},\dfrac{\partial}{\partial u^2}\right)$ 是一級协变张量，g_{ij} 是二級协变张量，g^{ij} 是二級逆变张量.

关于张量有以下的一些代数运算.

1) 二同一类型的张量的和、差仍为张量，其理由是，如果

$$T'^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}=T^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}\frac{\partial u'^{r_1}}{\partial u^{s_1}}\cdots\frac{\partial u'^{r_m}}{\partial u^{s_m}}\frac{\partial u^{q_1}}{\partial u'^{p_1}}\cdots\frac{\partial u^{q_n}}{\partial u'^{p_n}},$$

$$S'^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}=S^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}\frac{\partial u'^{r_1}}{\partial u^{s_1}}\cdots\frac{\partial u'^{r_m}}{\partial u^{s_m}}\frac{\partial u^{q_1}}{\partial u'^{p_1}}\cdots\frac{\partial u^{q_n}}{\partial u'^{p_n}},$$

则 $T' + S'$ 与 $T + S$ 也适合同样的关系式.

2) 二张量的乘积定义为

$$T^{r_1\cdots r_m s_1\cdots s_l}_{p_1\cdots p_n t_1\cdots t_h} = T^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}\ T^{s_1\cdots s_l}_{t_1\cdots t_h}.$$

这是一个 $l + m$ 阶逆变 $n + h$ 阶协变的张量.

3) 縮合. 把一个张量的上标与一个下标等同而加之,得出的結果仍然是一个张量. 例如,

$$K^{s_2\cdots s_m}_{q_2\cdots q_n} = T^{s_1 s_2\cdots s_m}_{s_1 q_2\cdots q_n}$$

是一个 $m - 1$ 級逆变 $n - 1$ 級协变的张量. 最簡单的例子是一个逆变矢量 u^i 与一个协变张量 v_j 的乘积

$$u^i v_j,$$

經过縮合得內积 $u^i v_i$. 张量积 $g_{ij}u^s u^t$ 可以經过两次縮合成为 $g_{ij}u^i u^j$. 如果經过几度縮合之后, 并无自由指标,则結果是一純量. $u^i v_i$ 及 $g_{ij}u^i u^j$ 都是例子.

在应用中經常出現,用 g_{ij} 来"降低"张量的高标和用 g^{ij} 来"提高"张量的低标的方法. 例如,张量 T_{ijk} 就可由 g^{ij}, g_{ij} 升降,如下法:

$$g^{il}T_{ijk} = T^l_{jk};\quad g^{jl}T_{ijk} = T^l_{ik};\quad g^{kl}T_{ijk} = T^l_{ij},\quad g^{il}g^{jm}T_{ijk} = T^{lm}_k,$$
$$g^{il}g^{km}T_{ijk} = T^{lm}_j,\quad g^{il}g^{jm}g^{kp}T_{ijk} = T^{lmp}. \tag{7}$$

同样

$$T^{jk}_l = g_{il}T^{ijk};\quad T^k_{lm} = g_{il}g_{jm}T^{ijk},\quad T_{lmp} = g_{il}g_{jm}g_{kp}T^{ijk}.$$

注意. 以上的規則是可逆的,如由(7)的第一式可得

$$g_{lm}T^l_{jk} = g_{lm}(g^{il}T_{ijk}) = \delta^i_m T_{ijk} = T_{mjk}.$$

有时为了表示被"提升""下降"后的原空位,用点表示之,例如(7)第一式可以記为 $T_{\cdot jk}^{l}$.

4) 张量的求商法則.

命 $T^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}$ 及 $T'^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}$ 各为一組 x^i 及 x'^i 的函数. 如果对任意逆变矢量 λ^i 与 λ'^i 及任一足标 p_h, q_h 常使

$$T^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_h\cdots p_n}\lambda^{p_h},\quad T'^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_h\cdots q_n}\lambda'^{q_h}$$

成为张量,則原来的 T 就是张量.

例如, T^{ij}_{klm} 与 T'^{pq}_{rst} 各为 x^i 与 x'^i 的函数,而且

$$T'^{pq}_{rst}\lambda'^s = T^{ij}_{klm}\lambda'^l \frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}\frac{\partial u^m}{\partial u'^t},$$

則

$$T'^{pq}_{rst}\lambda'^s = T^{ij}_{klm}\lambda'^s \frac{\partial u^l}{\partial u'^s}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}\frac{\partial u^m}{\partial u'^t},$$

即

$$\left(T'^{pq}_{rst} - T^{ij}_{klm}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}\frac{\partial u^l}{\partial u'^s}\frac{\partial u^m}{\partial u'^t}\right)\lambda'^s = 0$$

对所有的 λ' 都对,所以其括弧中的表式等于 0, 即 T^{ij}_{klm} 是张量.

张量的特点是：从一个坐标系变为另一个坐标系，张量的变化是十分明显的. 例如，我們証明了，在一特定的坐标系中张量的所有支量都等于 0，则在任何坐标系中都对. 也极易看出，$a^i b_i$，$g_{ij}\lambda^i\lambda^j$ 等都是不因坐标而变化的不变量.

§17. 基本方程之一——Gauss 方程

在 §1 中已經将三矢量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ 作为我們研究曲面性質的出发点，我們现在研究它們的偏微商. 把矢量 $\partial_j \mathbf{r}_i$ 按 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ 分解，得

$$\partial_j \mathbf{r}_i = \Gamma^h_{ji}\mathbf{r}_h + H_{ji}\mathbf{m} \tag{1}$$

现在算出 Γ^h_{ji} 与 H_{ji} 的表示式. 由于 $\partial_j \mathbf{r}_i = \partial_j(\partial_i \mathbf{r}) = \partial_i(\partial_j \mathbf{r}) = \partial_i \mathbf{r}_j$，可得对称性

$$\Gamma^h_{ji} = \Gamma^h_{ij}, \quad H_{ji} = H_{ij}. \tag{2}$$

求(1)与 $\mathbf{m}$ 的內积，得出

$$\partial_j \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{m} = H_{ji}. \tag{3}$$

微商 $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{m} = 0$ 得 $\partial_j \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{r}_i \partial_j \mathbf{m}$，因此

$$H_{ji} = -\mathbf{r}_i \cdot \partial_j \mathbf{m}. \tag{4}$$

所以

$$H_{ij} du^i du^j = -(\mathbf{r}_i du^i)(\partial_j \mathbf{m} du^j) = -d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{m},$$

这就是第二基本型，即

$$H_{11} = L, \quad H_{12} = H_{21} = M, \quad H_{22} = N.$$

H_{ij} 也是二級协变张量.

再求 Γ^h_{ji}，求

$$g_{ia} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_a$$

对 u^j 的微商. 再以(1)代入得

$$\partial_j g_{ia} = (\partial_j \mathbf{r}_i)\cdot \mathbf{r}_a + \mathbf{r}_i \cdot (\partial_j \mathbf{r}_a) = \Gamma^h_{ji}\mathbf{r}_h \cdot \mathbf{r}_a + \Gamma^b_{ja}\mathbf{r}_b \cdot \mathbf{r}_i,$$

即得

$$\partial_j g_{ia} = \Gamma^b_{ji} g_{ba} + \Gamma^b_{ja} g_{ib}. \tag{5}$$

交换 i, j 得

$$\partial_i g_{ja} = \Gamma^b_{ij} g_{ba} + \Gamma^b_{ia} g_{jb}. \tag{6}$$

再交换 i, a 得

$$\partial_a g_{ji} = \Gamma^b_{aj} g_{bi} + \Gamma^b_{ai} g_{jb}. \tag{7}$$

(5)，(6)相加，減去(7)式，得出

$$\partial_j g_{ia} + \partial_i g_{ja} - \partial_a g_{ji} = 2\Gamma^b_{ij} g_{ba}.$$

由 $g_{ba}g^{la} = \delta^l_b$ 得

$$2\Gamma^l_{ij} = (\partial_j g_{ia} + \partial_i g_{ja} - \partial_a g_{ji}) g^{la}.$$

命

$$[ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}\right)$$

及

$$\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} = [ij, k] g^{hk}.$$

这各称为 Christoffel 第一类、第二类符号，而得

$$\Gamma^l_{ij} = \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\},$$

因此有

$$\partial_j \mathbf{r}_i = \begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} \mathbf{r}_h + H_{ji}\mathbf{m}. \tag{8}$$

这称为 Gauss 方程.

用原符号 E, F, G 及 u, v 写出

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 21 \end{Bmatrix} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$

我們的問題是：Christoffel 符号是否成一张量. 答案是否定的.

从

$$g'_{pq} = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q}$$

得出

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial u'^r} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial u'^r} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} + g_{ij} \left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^q \partial u'^r} + \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p \partial u'^r} \right),$$

交换指标易得

$$\frac{\partial g'_{rq}}{\partial u'^p} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial u^k}{\partial u'^r} + g_{ij} \left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^r} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^q \partial u'^p} + \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p \partial u'^r} \right)$$

$$\frac{\partial g'_{pr}}{\partial u'^q} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial u'^q} \frac{\partial u^j}{\partial u'^p} \frac{\partial u^k}{\partial u'^r} + g_{ij} \left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^q \partial u'^r} + \frac{\partial u^j}{\partial u'^r} \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p \partial u'^q} \right).$$

此二式之和减去前式除 2 得

$$[pq, r]' = [ij, k] \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial u^k}{\partial u'^r} + g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^r} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^p \partial u'^q}, \tag{9}$$

这儿 $[pq, r]'$ 是由张量 g'_{ij} 所换成的 Christoffel 符号.

又由

$$g'^{rs} = g^{hl} \frac{\partial u'^s}{\partial u^h} \frac{\partial u'^r}{\partial u^l}$$

推得

$$g'^{rs} \frac{\partial u^h}{\partial u'^s} = g^{hl} \frac{\partial u'^r}{\partial u^l}.$$

以此乘(9)的两边，再对 r 求和得

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}' \frac{\partial u^h}{\partial u'^s} = [ij, k] \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} g^{hl} \delta^k_l + g_{ij} g^{hl} \delta^i_l \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^p \partial u'^q},$$

即得

$$\frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^p \partial u'^q} + \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} = \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}' \frac{\partial u^h}{\partial u'^s}. \tag{10}$$

(9)与(10)說明了，$[ij, h]$ 与 $\begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix}$ 都非张量.

§ 18. 基本方程之一——Weingarten 方程

再求 $\partial_i \mathbf{m}$，我們也可以写成为

$$\partial_i \mathbf{m} = K_i^h \mathbf{r}_h + L_i \mathbf{m}. \tag{1}$$

由 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$，所以 $\partial_i \mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 0$，因此 $L_i = 0$. 又微分 $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{m} = 0$，得

$$\partial_i \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{m} + \mathbf{r}_j \cdot \partial_i \mathbf{m} = 0.$$

以 Gauss 方程代入此式，得

$$H_{ij} + \mathbf{r}_j \cdot \partial_i \mathbf{m} = 0.$$

因此，由(1)得

$$H_{ij} = -K_i^h \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_h = -K_i^h g_{jh}.$$

因此

$$K_i^l = -H_{ij} g^{jl} = -H_i^{\cdot l}.$$

因此得 Weingarten 方程

$$\partial_i \mathbf{m} = -H_i^{\cdot l} \mathbf{r}_l. \tag{2}$$

命

$$(\partial_j \mathbf{m}) \cdot (\partial_i \mathbf{m}) = N_{ji},$$

則得

$$N_{ji}\, du^j\, du^i.$$

称为第三基本型，

$$N_{11} = E_0, \quad N_{12} = N_{21} = F_0, \quad N_{22} = G_0.$$

不难証明，N_{ij} 也是二級协变张量. 利用 Weingarten 方程，可以求出

$$N_{ji} = (\partial_j \mathbf{m})\cdot(\partial_i \mathbf{m}) = (-H_j^{\cdot b} \mathbf{r}_b)(-H_i^{\cdot a} \mathbf{r}_a) =$$
$$= H_j^{\cdot b} H_i^{\cdot a} \mathbf{r}_b \cdot \mathbf{r}_a = g_{ba} H_j^{\cdot b} H_i^{\cdot a}.$$

或

$$N_{ji} = H_{jb} H_{ia} g^{ba}.$$

上节及本节之結果可以概括成为矩陣形式：

$$\partial_1 \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & H_{11} \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & H_{12} \\ -H_1^{\cdot 1} & -H_1^{\cdot 2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \quad \partial_2 \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & H_{21} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & H_{22} \\ -H_2^{\cdot 1} & -H_2^{\cdot 2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{m} \end{pmatrix},$$

卽三矢量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ 的一級偏微商公式. 下节的問題在于二級偏微商，并注意

$$\partial_1 \partial_2 = \partial_2 \partial_1.$$

§ 19. Gauss 与 Codazzi 方程

由 Gauss 方程

$$\partial_k \partial_j \mathbf{r}_i = \partial_k \left(\begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} \mathbf{r}_h + H_{ji} \mathbf{m} \right) = \partial_k \begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} \mathbf{r}_h + \begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} \partial_k \mathbf{r}_h +$$
$$+ \partial_k H_{ji} \mathbf{m} + H_{ji} (\partial_k \mathbf{m}) = \left[\partial_k \begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} h \\ ka \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ ji \end{Bmatrix} - H_k^{\cdot h} H_{ji} \right] \mathbf{r}_h +$$
$$+ \left[\partial_k H_{ji} + \begin{Bmatrix} a \\ ji \end{Bmatrix} H_{ka} \right] \mathbf{m}.$$

在这式子里交换 h 与 j, 然后相减得

$$0=\left[\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}-\partial_i\begin{Bmatrix}h\\ki\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}h\\ja\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}-H_k^{\cdot h}H_{ji}-H_j^{\cdot h}H_{ki}\right]\mathbf{r}_h+$$

$$+\left[\partial_kH_{ji}-\partial_jH_{ki}+\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}H_{ka}-\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}H_{ja}\right]\mathbf{m}.$$

由于 $\mathbf{r}_h$ 与 $\mathbf{m}$ 綫性无关,所以

$$\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}-\partial_i\begin{Bmatrix}h\\ki\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}h\\ja\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}=H_k^{\cdot h}H_{ji}-H_j^{\cdot h}H_{ki},$$

$$\partial_kH_{ji}-\partial_jH_{hi}+\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}H_{ka}-\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}H_{ja}=0.$$

因此,如果命

$$R_{kji}^{\cdots h}=\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}-\partial_i\begin{Bmatrix}h\\ki\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}h\\ja\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix} \tag{1}$$

及

$$\nabla_kH_{ji}=\partial_kH_{ji}-\begin{Bmatrix}a\\kj\end{Bmatrix}H_{ai}-\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}H_{ja}, \tag{2}$$

则上两式可以写成为

$$R_{kji}^{\cdots h}=H_k^{\cdot h}H_{ji}-H_j^{\cdot h}H_{ki} \tag{3}$$

及

$$\nabla_kH_{ji}=\nabla_jH_{ki}. \tag{4}$$

这两式子分别称为 Gauss 方程与 Codazzi 方程.

Gauss 与 Codazzi 方程可以看成为 Gauss, Weingarten 方程的求解条件,說得更具体些,给了两組函数 E, F, G 与 L, M, N. 如果 $EG-F^2>0$ 及它們适合 Gauss 及 Codazzi 方程,則有一个曲面以此为第一、第二微分型. 除去一个位移这曲面是唯一决定的, 我們不証明这个定理,但是可以把它說得更明确些:存在函数

$$x=x(u^1,u^2),\quad y=y(u^1,u^2),\quad z=z(u^1,u^2)$$

使 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 适合于

$$\partial_i\mathbf{r}=\mathbf{r}_i,\ \partial_j\mathbf{r}_i=\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}\mathbf{r}_h+H_{ji}\mathbf{m},\ \partial_i\mathbf{m}=-H_i^{\cdot l}\mathbf{r}_l$$

及

$$\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_j=g_{ij},\quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{m}=1,\quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{r}_i=0.$$

§20. 曲 率 张 量

命

$$R_{kjih}=R_{kji}^{\cdots a}g_{ah}.$$

这 R_{kjih} 有以下的性質:

$$R_{kjih}=-R_{jkih},\quad R_{kjih}=-R_{kjhi},\quad R_{kjih}=R_{ihkj}, \tag{1}$$

$$R_{kjih}+R_{jikh}+R_{ikjh}=0. \tag{2}$$

最后一式称为 Bianchi 恆等式. 由 (19.3),

$$R_{kjih}=H_{kh}H_{ji}-H_{jh}H_{ki}. \tag{3}$$

这称为 Riemann 第一类曲率张量，而 R^{a}_{kij} 称为第二类曲率张量．现在直接証明，它确是一个张量．

前已算得

$$\frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^p \partial u'^q}+\left\{{h \atop ij}\right\}\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}=\left\{{s \atop pq}\right\}'\frac{\partial u^h}{\partial u'^s}. \tag{4}$$

对 u'^r 求偏微商，再減去将此式經 q, r 互換而得出的式子，則

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\left\{{h \atop ik}\right\}-\frac{\partial}{\partial u^k}\left\{{h \atop ij}\right\}\right)\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}+$$

$$+\left\{{h \atop ij}\right\}\left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p\partial u'^q}\frac{\partial u^j}{\partial u'^r}-\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p\partial u'^r}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u'^q}\left\{{s \atop pr}\right\}'-\frac{\partial}{\partial u'^r}\left\{{s \atop pq}\right\}'\right)\frac{\partial u^h}{\partial u'^s}+\left\{{s \atop pr}\right\}'\frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^s\partial u'^q}-\left\{{s \atop pq}\right\}'\frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^s\partial u'^r}.$$

此式中的二阶偏微商用(4)代入，則得

$$R^h_{ijk}\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}=R'^s_{pqr}\frac{\partial u^h}{\partial u'^s}.$$

我們为什么再給一个直接証明？表达式（3）与第二基本微分型有关．但无論是对 Christoffel 符号与Riemann 张量来說，都只与第一基本微分型有关．因此，开了一扇門，单从第一基本微分型出发可能进行不少深入的研究——这样就誕生了 Riemannian 几何学．

現在举一个例来說明张量的好处．从最簡单的 $z=0$ 平面出发，它的第一微分二次型是

$$dx^2+dy^2.$$

换变数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$，得出一个直覚上很不清楚的东西．对原来的表达式来說，Christoffel 符号等于 0，但换了变数之后却并无保証．用张量来說，那就可以知道了，不管你用什么参变量，Riemann 张量总是等于 0 的．

由(3)可知

$$R_{1212}=H_{12}H_{21}-H_{11}H_{22}=M^2-LN.$$

經过关系 (1) 所得出的另一些支量可能非 0，但其它的支量一定等于 0．因此，在曲面論中 R_{1212} 占特别重要的地位．如果回到本章中的符号，Gauss 曲率

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{K_{1212}}{g},\qquad g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix},$$

而平均曲率

$$H=\frac{LG-2FM+NE}{2(EG-F^2)}=\frac{1}{2}g^{ij}H_{ij}.$$

又

$$H_{ij}=H_{ia}H_{jb}g^{ab}=(H_{ia}H_{jb}-H_{ij}H_{ab})g^{ab}+H_{ij}H_{ab}g^{ab}=-Kg_{ij}+2HH_{ij}$$

$\left(\text{由于 } g^{11}=\frac{g_{22}}{g},\ g^{12}=g^{21}=-\frac{g_{12}}{g},\ g^{22}=\frac{g_{11}}{g}\right)$．这样就建立起第一，第二，第三基本型的关系式

$$K d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}-2H\, d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{m}+d\mathbf{m}\cdot d\mathbf{m}=0.$$

第十九章 Fourier 級数

§1. 三角函数的正交性

我們已經知道

$$\sin x,\quad \cos x$$

是以 2π 为周期的函数，又任一以 ω 为周期的函数 $f(x)$（即 $f(x+\omega)=f(x)$）可以用换变数法变为

$$g(x)=f\left(\frac{\omega}{2\pi}x\right).$$

这是一个以 2π 为周期的函数. 我們的問題是要研究一般的以 2π 为周期的函数. 我們知道，对任一整数 $k\left(\gtreqless 0\right)$,

$$\sin kx,\quad \cos kx$$

都是以 2π 为周期的函数. 又显然可知，以 2π 为周期的函数的綫性組合

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

仍以 2π 为周期. 这便自然地引出了研究收斂級数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

所代表的函数 $f(x)$.

为了研究函数 $f(x)$ 与系数 a_k, b_k 的关系，我們要用到三角函数的正交关系.

首先，不难証明

$$\int_0^{2\pi}\cos kxdx=0,\ \int_0^{2\pi}\sin kxdx=0,\quad k=1,2,3,\cdots;$$

其次，由已知的三角公式

$$\sin kx\cos lx=\frac{1}{2}(\sin(k+l)x+\sin(k-l)x),$$

$$\sin kx\sin lx=\frac{1}{2}(\cos(k-l)x-\cos(k+l)x),$$

$$\cos kx\cos lx=\frac{1}{2}(\cos(k+l)x+\cos(k-l)x),$$

可以証明

$$\int_0^{2\pi}\cos kx\sin lxdx=0$$

及当 $k \neq l$ 时

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx\, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx\, dx = 0.$$

也由于

$$\cos^2 kx = \frac{1 + \cos 2kx}{2}, \quad \sin^2 kx = \frac{1 - \cos 2kx}{2},$$

可知当 $k \neq 0$ 时

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi.$$

总括这些結果，可知

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \quad k = 1, 2, \cdots$$

是一系列函数，其中任意两个之积由 0 到 2π 求积分得 0，自己的平方的积分得 1．前者称为一个函数系的正交性，后者称为就范性．根据这个性質，如果級数(1)一致收斂于函数 $f(x)$，即

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

逐項求积分可知

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \pi a_0.$$

乘以 $\cos lx$ 而逐項求积分，可得

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos lx dx = \pi a_l.$$

又乘以 $\sin lx$ 而逐項求积分，可得

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin lx dx = \pi b_l.$$

因而得出

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ a_l &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos lx dx, \quad b_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin lx dx. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这些系数称为函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数，而級数(1)称为函数 $f(x)$ 的 Fourier 級数．

由此可見，一个一致收斂的 Fourier 級数代表一个函数 $f(x)$，而 $f(x)$ 也可以由(2)得出它的 Fourier 級数来．对于任意一个可以求积分的函数 $f(x)$，我們都可以由(2)造出 Fourier 級数来，但問題在于，这 Fourier 級数在怎样程度上代表原函数 $f(x)$．

附記 1. 如果不假定一致收斂，而仅假定囿收斂，以上的叙述仍为正确．

2. 以上的区間 $(0, 2\pi)$ 若換为任意一个长度是 2π 的区間也眞，即 $(c, c + 2\pi)$．特别，如 $(-\pi, \pi)$．

§ 2. 几个三角級数的和

如果注意三角級数是冪級数的实数部分或虚数部分这一点，我們容易計算出三角級数的和来．

例如,当 $|z|<1$, 我們有

$$1+z+z^2+\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{1-z}.$$

如果我們以 $z=re^{i\theta}=r\cos\theta+ir\sin\theta$ 代入,并分出实数与虚数部分,立得

$$2+2r\cos\theta+2r^2\cos 2\theta+\cdots=\frac{1}{1-re^{i\theta}}+\frac{1}{1-re^{-i\theta}}=\frac{2-2r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

及

$$i(2r\sin\theta+2r^2\sin 2\theta+\cdots)=\frac{1}{1-re^{i\theta}}-\frac{1}{1-re^{-i\theta}}=\frac{2ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

由此立得,当 $0<r<1$ 时,有

$$P_r(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos kx=\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} \tag{1}$$

及

$$Q_r(x)=\sum_{k=1}^{\infty}r^k\sin kx=\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}. \tag{2}$$

同法,由 $-\log(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\cdots$ 立得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}r^k=\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-2r\cos x+r^2} \tag{3}$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}r^k=\mathrm{tg}^{-1}\frac{r\sin x}{1-r\cos x}, \tag{4}$$

此处 $0<r<1$, $\mathrm{tg}^{-1}0=0$.

又从

$$1+z+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

可得

$$2+2\cos x+\cdots+2\cos nx=\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}+\frac{1-e^{-ix(n+1)}}{1-e^{-ix}}$$

$$=\frac{2-2\cos x-2\cos(n+1)x+2\cos nx}{2-2\cos x}=\frac{4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+4\sin\frac{x}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

因此得

$$p_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}. \tag{5}$$

同法可証

$$q_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}. \tag{6}$$

由此可見，当 $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 时，

$$|p_n(x)|<\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon},\quad |q_n(x)|<\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

现在再考虑 $p_n(x)$ 的平均值

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}p_n(x)=\frac{1}{2N\sin\frac{1}{2}x}\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x=\frac{\sin^2\frac{1}{2}Nx}{2N\left(\sin\frac{1}{2}x\right)^2}. \tag{7}$$

此式之証明可用次法

$$\sin\frac{1}{2}x\left(\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}(\cos nx-\cos(n+1)x)=\frac{1}{2}(1-\cos Nx)=\sin^2\frac{Nx}{2}.$$

最值得注意的一点是，$p_n(x)$的平均值**永远是正的**.

又从正交性立刻得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p_n(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=1, \tag{8}$$

$$\int_0^{2\pi}q_n(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=0, \tag{9}$$

还有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}Nx\,dx}{2N\left(\sin\frac{1}{2}x\right)^2}=1. \tag{10}$$

这些式子以后都很有用.

§3. Dirichlet 积分

我們考虑函数 $f(x)$ 的 Fourier 級数的部分和

$$s_n=s_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1}$$

此处

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt.$$

以此代入(1)式，可知

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt+\sin kx\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt.$$

命 $t=x+u$，則得

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}f(x+u)\,du. \tag{2}$$

由于被积函数是以 2π 为周期的，所以

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}f(x+u)\,du.$$

此称为 Dirichlet 积分．又可以把以上的积分分为两部分：

$$s_n=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}=\int_0^{\pi}+\int_{-\pi}^{0},$$

后者以 $-u$ 代 u，則得

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u)+f(x-u))\,du. \tag{3}$$

由上节已知，当 $f(x)=1$ 时，$s_n=1$，卽

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}2\,du.$$

乘以 $f(x)$ 再在(3)式中减之，可得

$$s_n-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\,du, \tag{4}$$

所以 s_n 是否收斂于 $f(x)$ 的問題，一变而为以上的积分是否收斂于 0 的問題了．

今后我們将研究怎样的函数在那些点 x，s_n 收斂于 $f(x)$．在讲收斂之前，先讲逼近．

§4. 平方中值誤差及 Bessel 不等式

假定 $f(x)$ 是 $(0,2\pi)$ 上的一个函数，問題是怎样的三角多項式

$$g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx) \tag{1}$$

使平方中值誤差

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \tag{2}$$

最小，即定出系数 α_l, β_l 来使(2)最小。

我們把(2)写成为

$$\int_0^{2\pi} \left(f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right)^2 dx = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx -$$

$$- 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right) f(x) dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right)^2 dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - 2\pi\left(\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k)\right) + \pi\left[2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx + \pi\left(2\left(\frac{\alpha_0 - a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right) -$$

$$- \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right) \geqslant \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right),$$

即(2)的最小值等于

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right),$$

且仅当 $a_k = \alpha_k$, $b_k = \beta_k$ 时取这最小值。

总起来一句話，如果三角多項式的系数就是 $f(x)$ 的 Fourier 系数，那末原函数和这多項式的平方中值誤差最小。

又因积分(2)总是 $\geqslant 0$ 的，所以得不等式

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \geqslant \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2).$$

我們現在看一下，在 $f(x)$ 上已經用了些什么假定，我們要的是

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx,\ \int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx,\ \int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx \tag{A}$$

都存在。如果我們假定 $f(x)$ 是 Riemann 可积的（注意并不是广义可积），則 $f(x)$ 有界而且(A)中各积分都存在（这儿用了两个 Riemann 可积函数的乘积仍是 Riemann 可积）。在这假定下，命 $n \to \infty$，可知

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \geqslant \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \tag{3}$$

右边的收斂性可由单調递增有界（即左边）这些性质得之，不等式(3)称为 Bessel 不等式。

由此立刻得出

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \to 0,\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx \to 0.$$

我們現在証明更普遍些的

定理 1 (Riemann-Lebesgue). 对任一有限区間$[a, b]$及其上任意一个 Riemann 可积函数 $f(x)$,常有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0.$$

証. 先将 $[a, b]$ 分成 n 个部分

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \tag{4}$$

分别用 M_i 及 m_i 来表示 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的确上界及确下界. 因此

$$\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f(x) - m_i)\sin\lambda x\,dx + \sum_{i=0}^{n-1} m_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin\lambda x\,dx.$$

由于

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin\lambda x\,dx\right| \leqslant \frac{2}{\lambda},$$

故得

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{2}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

任給 $\varepsilon > 0$, 由于 $f(x)$ 为一 Riemann 可积函数,所以选取 $[a, b]$ 的分法(4),使

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

分法确定后, 則 $\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|$ 为一确定的数. 取 $\Lambda = \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|$, 故当 $\lambda > \Lambda$ 时

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\right| < \varepsilon.$$

同理,当 $\lambda > \Lambda$ 时

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| < \varepsilon.$$

定理証完.

§5. 收斂判别条件

我們再回到 §3, 仍旧保留 §4 的假定(A), 考虑在什么条件下, $s_n \to s$. 当然趋向可以有多种意义,例如,在某一点 $s_n \to s$ 或在某一区域內, s_n 一致趋向 s 等.

为了簡便起見,命

$$\phi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2s. \tag{1}$$

这样 §3 的收斂条件就变为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\phi(u)du = 0. \tag{2}$$

由 Riemann-Lebesgue 定理可知,对任一 $\delta > 0$, 我們常有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,\frac{\phi(u)}{\sin\frac{1}{2}u}\,du = 0, \tag{3}$$

原因是 $\phi(u)/\sin\frac{1}{2}u$ 在$[\delta,\pi]$上 Riemann 可积适合于条件(A)。

由(2)減(3)可知,收斂条件变为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\phi(u)du=0. \tag{4}$$

再由 Riemann-Lebesgue 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}u}-\frac{1}{\frac{1}{2}u}\right)\phi(u)\,du=0, \tag{5}$$

所以收斂条件又变为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\phi(u)}{u}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu=0. \tag{6}$$

如果把

$$\lim_{u\to 0}\frac{\phi(u)}{u} \tag{7}$$

的存在性作为条件,則又由 Riemann-Lebesgue 定理可知(6)式是正确的,因而得出

定理 1. 如果 $f(x)$ 适合于条件(A),而且在 $x=x_0$ 这一点极限

$$\lim_{u\to 0}\frac{\phi(u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-2s}{u} \tag{8}$$

存在,則当 $n\to\infty$ 时

$$s_n\to s.$$

如果 $f(x)$ 在这一点連續,s_n 就趋于 $s=f(x)$. 如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时是一第一类間断点,則由(8)可知

$$s=\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)),$$

即

$$s_n\to\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)).$$

这也同样証明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}f(u)du=\frac{1}{2}(f(+0)+f(-0)).$$

处理积分(6)还有其他的方法. 例如,$\phi(u)$ 是单調函数,则由第二中值公式可知(如果 $\phi(u)$ 正的单調上升)

$$\int_0^\delta \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,\frac{\phi(u)}{u}\,du=\phi(\delta)\int_\eta^\delta\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}du=$$

$$=\phi(\delta)\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}\frac{\sin u}{u}du.$$

但积分 $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du$ 是收斂的，所以获得結論(6)仍为正确。

由此可推得

定理 2. 如果 $f(x)$ 仅有有限个极大极小及有限个第一类間断点，則它的 Fourier 級数对所有的 x 都收斂于 $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$。

現在再研究在区間上收斂的間題。有这样的可能性，对每一 x，Fourier 級数都收斂于这个函数，但該級数并不一致收斂于这个函数。

定理 3. 如果在 (a, b) 中 $f(x)$ 是两个单調增加連續函数的差，则在任一处于 (a, b) 內部的閉区間中，它的 Fourier 級数一致收斂于 $f(x)$。

假定 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$，此处 f_1 与 f_2 都是单調增加的連續函数，由一致連續性可知，对于任何 $\varepsilon>0$，有 η，使

$$|f_1(x+h)-f_1(x)|<\varepsilon \quad (|h|<\eta),$$

这 η 的选择仅与 ε 有关而与 x 无关。

由以上的証明就可以得出积分的一致收斂性。

例 1. 在区間 $(-\pi, \pi)$ 中把函数 x 展开为 Fourier 級数。

因为 x 是奇函数，所以

$$\pi a_k=\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx=0,$$

而

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx dx=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^\pi+\frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx dx\right\}=\frac{2(-1)^{k-1}}{k},$$

因而 x 在 $(-\pi, \pi)$ 上的 Fourier 級数等于

$$2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}+\cdots\right).$$

由定理 1 可知，当 $-\pi<x<\pi$ 时，上級数的和就是 x。把 x 視作为周期函数，即在 $(-\pi, \pi)$ 中用此定义，但出了这个区間之外，則用周期性获得函数的数值，如此則这个函数在 $x=\pi$ 这一点并不連續，該級数应当等于 $\frac{1}{2}(f(\pi+0)+f(\pi-0))=0$。所以

$$\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}+\cdots$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 若 -\pi<x<\pi,\\ 0 & 若\ x=\pm\pi.\end{cases}$$

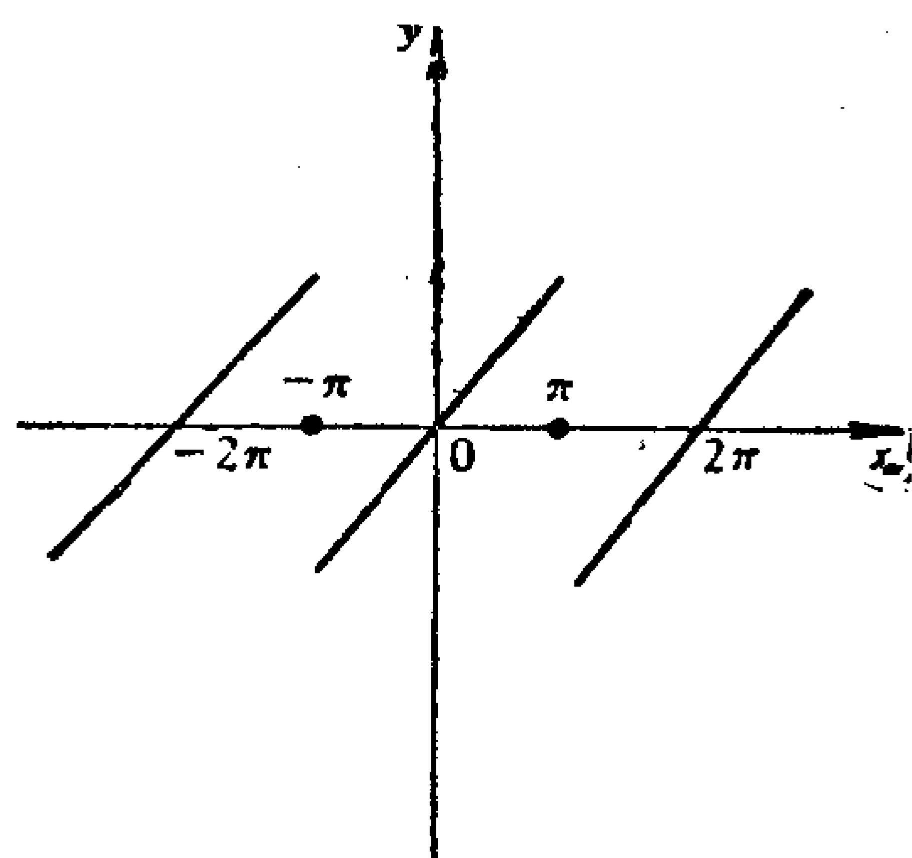


图 109

在这个式子里，取 $x=\frac{\pi}{2}$，立得公式

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

例 2. 求 x^2 在 $(-\pi, \pi)$ 間的 Fourier 級数。由于

x^2 是偶函数，所以

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin kx dx = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2 \sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x \sin kx dx\right\}$$

$$= \frac{4}{k\pi}\left\{\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\, dx\right\} = (-1)^k \frac{4}{k^2}.$$

由于 $f(\pi+0) = f(\pi-0)$，所以

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos kx}{k^2},\quad -\pi < x < \pi.$$

它所表示的函数如图 110.

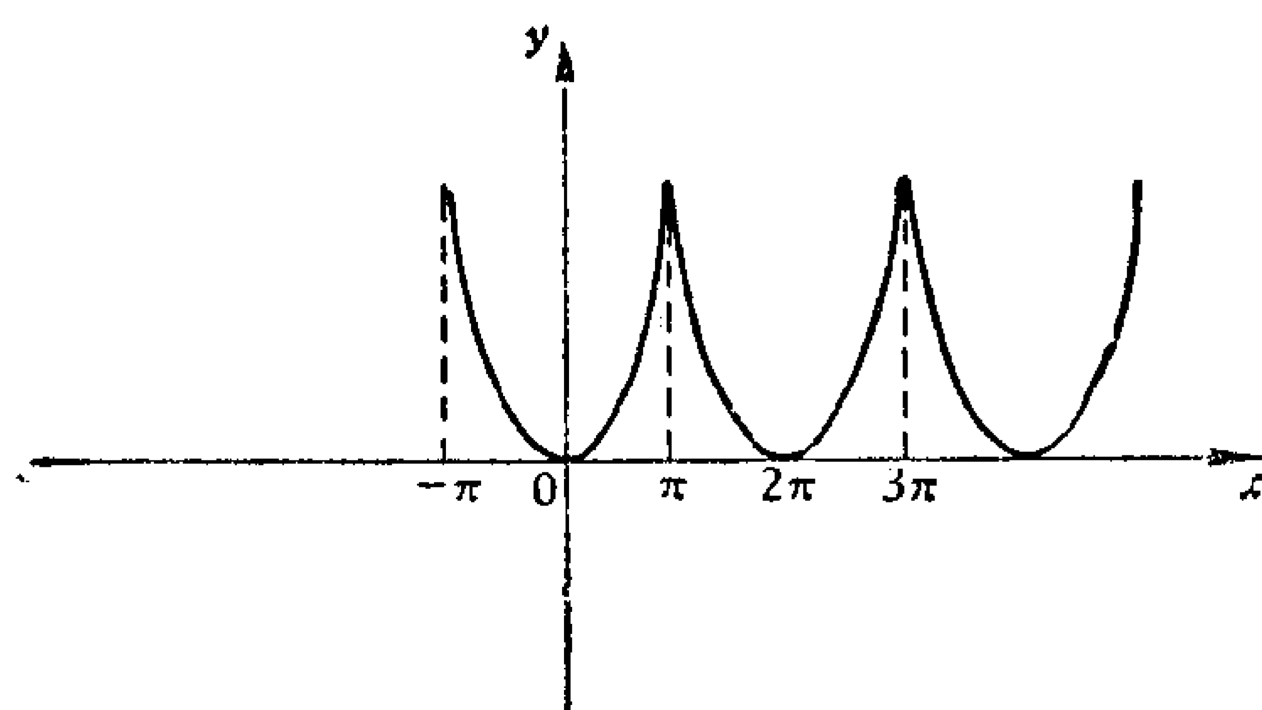


图 110

命 $x = 0$，则得

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

若設

$$\sigma = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

則有

$$\sigma = \frac{\pi^2}{12} + 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{(2k)^2} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\sigma.$$

所以得

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

例 3. 命

$$f(x) = \begin{cases} C_1 & 若 -\pi < x < 0, \\ C_2 & 若\ 0 < x < \pi, \end{cases}$$

求它的 Fourier 級数.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} C_1 dx + \int_0^{\pi} C_2 dx\right] = C_1 + C_2,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} C_1 \cos kx dx + \int_0^{\pi} C_2 \cos kx dx\right] = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1 \sin kx\, dx + \int_0^{\pi} C_2 \sin kx\, dx\right) = (C_1 - C_2)\frac{(-1)^k - 1}{\pi k},$$

所以

$$\frac{C_1+C_2}{2}-\frac{2(C_1-C_2)}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right)=$$

$$=\begin{cases}C_1, & -\pi<x<0,\\ C_2, & 0<x<\pi,\\ \dfrac{C_1+C_2}{2}, & x=0.\end{cases}$$

它的图形是

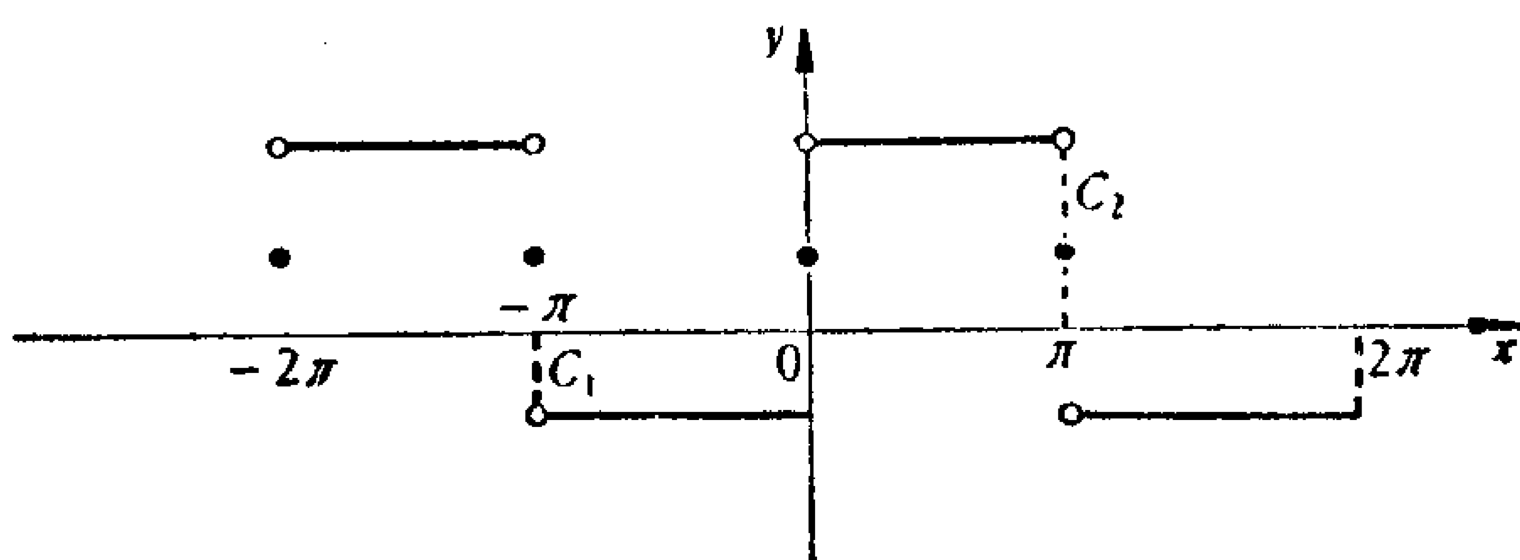


图 111

§ 6. 在区間 $(0,\pi)$ 上的展开式

由上节的例 1 与例 2 已經看出来,对于 $(-\pi,\pi)$ 中的奇函数 $f(x)$、有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, \tag{1}$$

故奇函数的 Fourier 級数只含正弦項,即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx. \tag{2}$$

同样,若 $f(x)$ 是偶函数,則

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0. \tag{3}$$

因此偶函数的 Fourier 級数只含余弦項,即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx. \tag{4}$$

如果給出区間 $(0,\pi)$ 上的任一函数 $f(x)$,則这个函数可以展开成只含正弦項的級数(2),其系数 b_n 由(1)来定义. 也可以展成只含余弦項的級数(4),其系数由(3)定义,不过

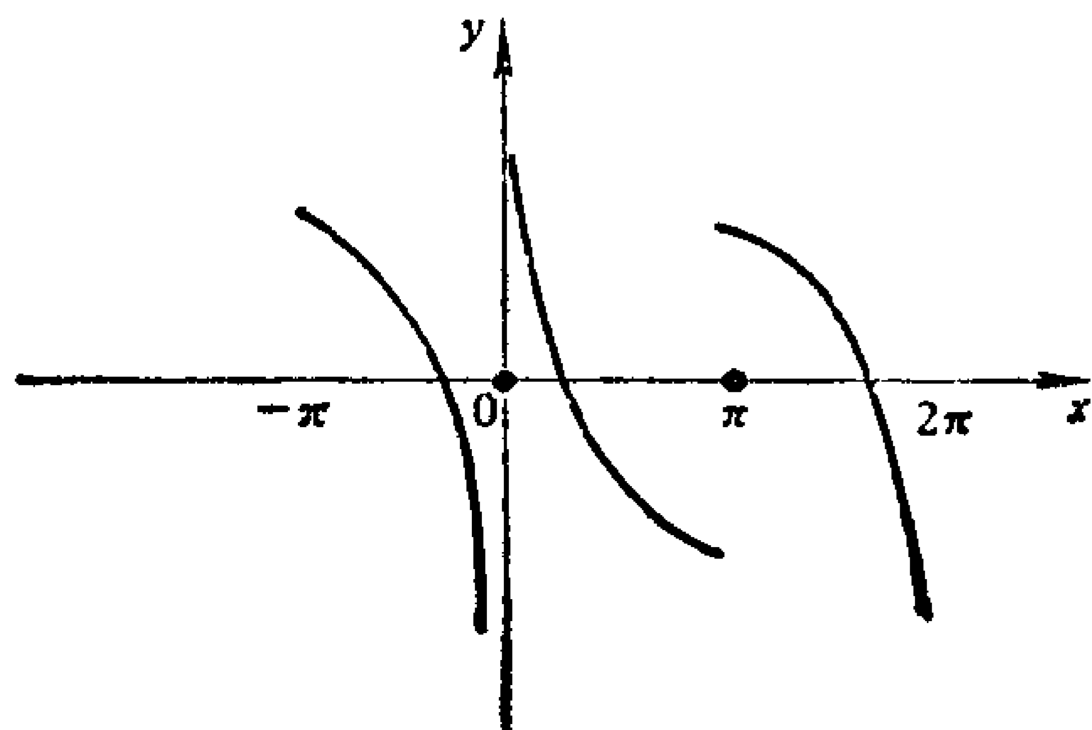


图 112

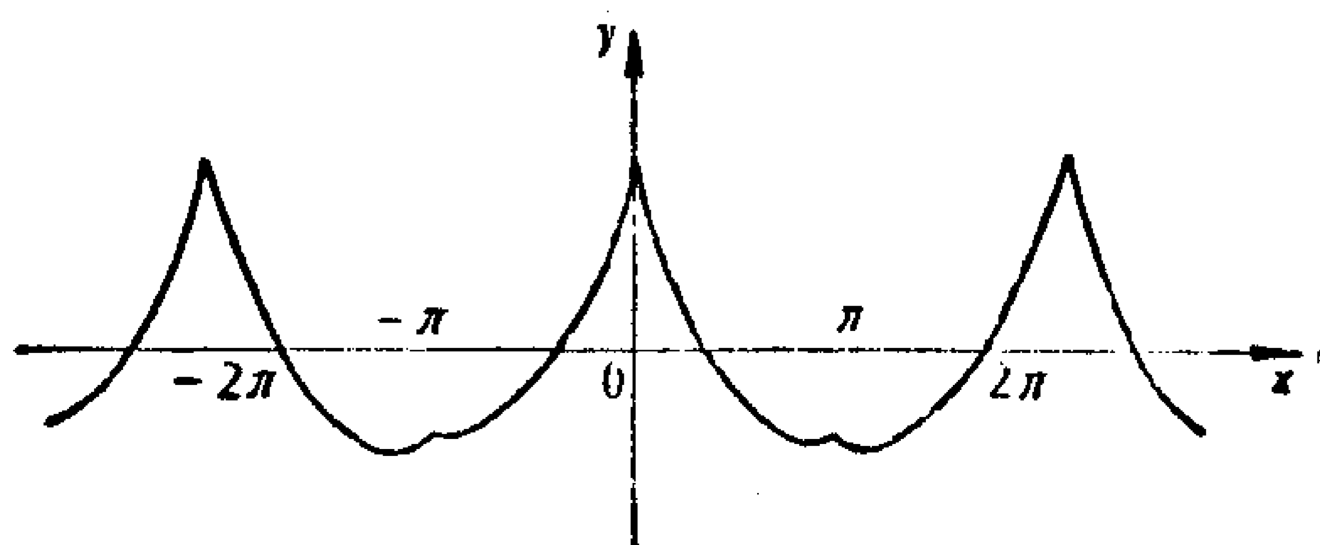


图 113

在$(0, \pi)$之外，它們所表示的函数就完全不同了。正弦級数給出的函数是奇函数：在开区間$-\pi<x<0$內为$-f(-x)$，

$$f(-0)=-f(+0), \quad f(-\pi+0)=-f(\pi-0)$$

且$f(0)=f(\pi)=0$，而余弦級数在$(-\pi, 0)$內所給出的則是偶函数：

$$f(-0)=f(+0)=f(0), \quad f(-\pi+0)=f(\pi-0)=f(\pi).$$

例 1. 将x展开为余弦級数。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\pi,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k-1],$$

因此

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\cdots+\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\cdots\right], \quad (0<x<\pi).$$

在区間$(-\pi, 0)$上，右边的級数和就是$-x$，因此，在$(-\pi, \pi)$上，这一級数与$|x|$完全相同（图 114）。

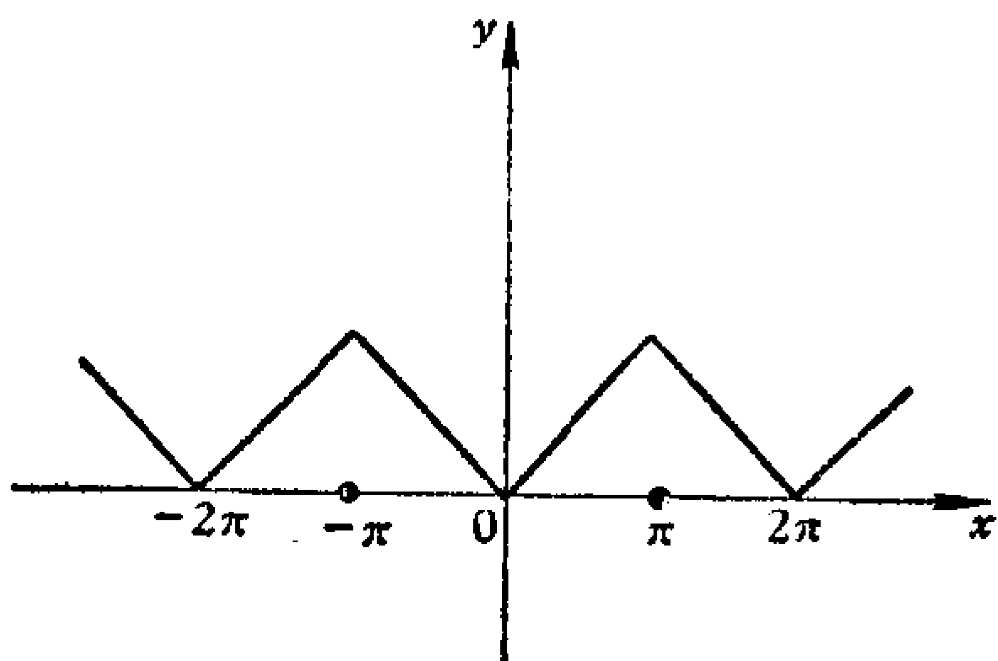


图 114

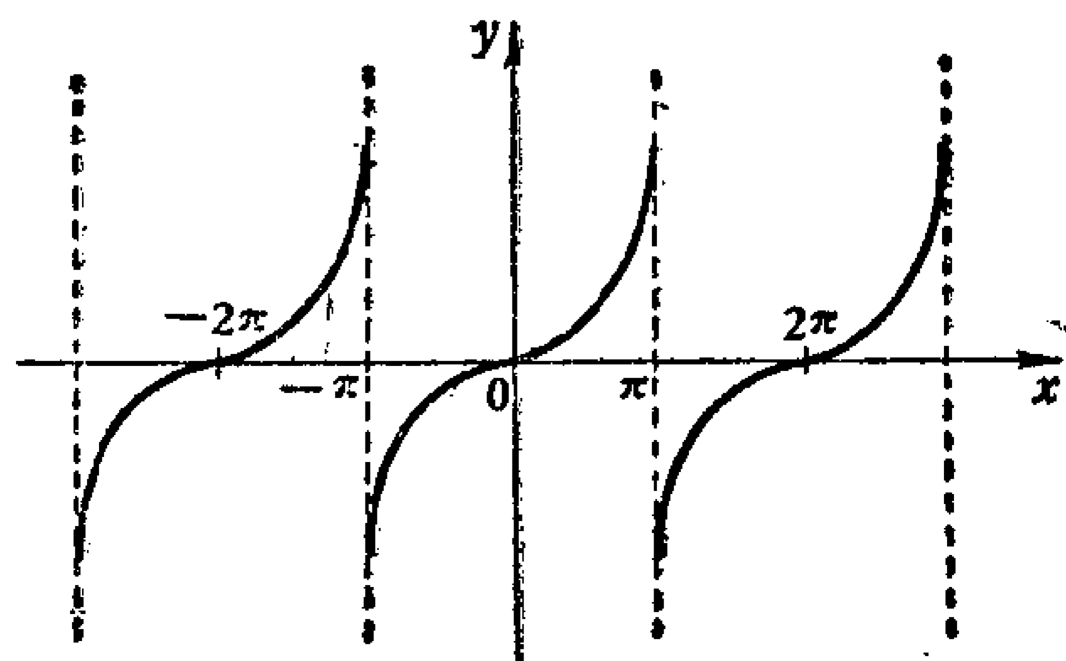


图 115

例 2. 将x^2展成正弦級数。

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin kx\,dx=\frac{2(-1)^{k-1}\pi}{k}+\frac{4[(-1)^k-1]}{\pi k^3},$$

故得

$$x^2=2\pi\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right]-\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\cdots\right]$$

（图 115）。

例 3. $\cos zx$是x的偶函数，故可以在$(-\pi, \pi)$上展开为余弦級数。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos zx\,dx=\frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin zx}{z}\right|_0^\pi=\frac{2\sin\pi z}{\pi z},$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos zx\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(z+k)x+\cos(z-k)x]dx=$$

$$=(-1)^k\frac{2z\sin\pi z}{\pi(z^2-k^2)},$$

因此

$$\cos zx=\frac{2z\sin\pi z}{\pi}\left[\frac{1}{2z^2}+\frac{\cos x}{1^2-z^2}-\frac{\cos 2x}{2^2-z^2}+\frac{\cos 3x}{3^2-z^2}+\cdots\right].$$

以 $x = \pi$ 代入,得

$$\operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2}\right]. \tag{5}$$

这称为 $\operatorname{ctg}\pi z$ 的分式展开式。对 z 求微商,即得 $\frac{1}{\sin^2 \pi z}$ 的分式展开式:

$$\frac{1}{\sin^2\pi z} = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{z^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + z^2}{(k^2 - z^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(z+k)^2} + \frac{1}{(z-k)^2}\right\}\right] = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2}.$$

在(5)式中以 $\frac{z}{\pi}$ 代 z,则得

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^2}{k^2\pi^2 - z^2}.$$

当 $|z| < \pi$ 时,由于

$$\frac{2z^2}{k^2\pi^2 - z^2} = \frac{2z^2}{k^2\pi^2\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)} = 2\frac{z^2}{k^2\pi^2}\left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2} + \cdots + \frac{z^{2n}}{k^{2n}\pi^{2n}} + \cdots\right),$$

故得

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - 2\frac{z^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 2\frac{z^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} - \cdots - 2\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} - \cdots.$$

再以 $\frac{z}{2}$ 代 z,得

$$\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\right]z^{2n} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(2n)!}z^{2n}, \tag{6}$$

此处

$$B_n = \frac{2\cdot(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}, \tag{7}$$

称之为 Bernoulli 数。用幂级数直接展开 $\cos\frac{z}{2}\Big/\left(\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}\right)$,可知諸 B_n 都是有理数,例如

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{5}{66},\cdots,$$

因此也算出了 Riemann ζ 函数在偶数所取的值

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}B_n}{2\cdot(2n)!}\ (n = 1, 2, \cdots).$$

在(6)中以 $\frac{t}{i}$ 代 z,则得

$$\frac{t}{2i}\operatorname{ctg}\frac{t}{2i} = \frac{t}{2i}\cdot\frac{\cos\frac{t}{2i}}{\sin\frac{t}{2i}} = \frac{t}{2}\cdot\frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2}.$$

由此推出

$$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{t}{2}+\frac{B_1t^2}{2!}-\frac{B_2t^4}{4!}+\cdots=A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots, \tag{8}$$

此处

$$A_0=1,\quad A_1=-\frac{1}{2},\quad A_{2k}=\frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!},\ A_{2k+1}=0\ (k=1,2,\cdots) \tag{9}$$

称之为 Euler 数。

§7. Gibbs 現象

以上为了保持 Fourier 級数的收斂性，我們在 $f(x)$ 上加了两个条件：在連續性之外又添了另一个性質。我們可以举出例子，仅仅連續性幷不能保証 Fourier 級数的收斂性，这样的例子是 P. Du Bois-Reymond 首先举出的，卽一个 Fourier 級数在一点是发散的，虽然对应的函数在那一点是連續的。

关于不連續函数的 Fourier 級数的情況，更有所謂 Gibbs 現象。

已知

$$f(x)=2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin(2r-1)x}{2r-1}=\begin{cases}\frac{1}{2}\pi, & 若\quad 0<x<\pi,\\ -\frac{1}{2}\pi, & 若 -\pi<x<0,\\ 0, & 若\quad x=0,-\pi,\pi.\end{cases}$$

命

$$s_n(x)=2\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin(2r-1)x}{2r-1},$$

則

$$\frac{d}{dx}s_n(x)=2\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)x=\frac{\sin 2nx}{\sin x}.$$

所以

$$s_n(x)=\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt,$$

因此

$$s_n(x)-\int_0^x\frac{\sin 2nt}{t}dt=\int_0^x\sin 2nt\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)dt,$$

卽

$$s_n(x)-\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\sin 2nt\,\frac{t}{\sin t}\left(\frac{t}{3!}-\frac{t^3}{5!}+\cdots\right)dt.$$

因为当 t 由 0 增加至 $\frac{1}{2}\pi$ 时，$\frac{t}{\sin t}$ 連續地由 1 增加至 $\frac{\pi}{2}$；又当 $0<t\leqslant\frac{1}{2}\pi$ 时，$0<\frac{t}{3!}-\frac{t^3}{5!}+\cdots<\frac{t}{3!}$. 所以，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\left|s_n(x)-\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{t}dt\right|<\frac{\pi}{12}\int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{24}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x < \delta$ 时,对任意正整数 n, 皆有

$$\left| s_n(x) - \int_0^{2nx} \frac{\sin t}{t} dt \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

命

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

由于

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\pi \frac{(-1)^k \sin u}{k\pi + u} du,$$

所以当 $k = 0,1,2,\cdots$ 时, 正負相間且絕对值单調递减, 故函数 $y = \varphi(x)$在 $x = \pi$、3π、5π、$\cdots$ 有极大值 $M_1 > M_3 > M_5 > \cdots$, 而在 $x = 2\pi$, 4π, 6π, $\cdots$ 有极小值 $m_2 < m_4 < m_6 < \cdots$.

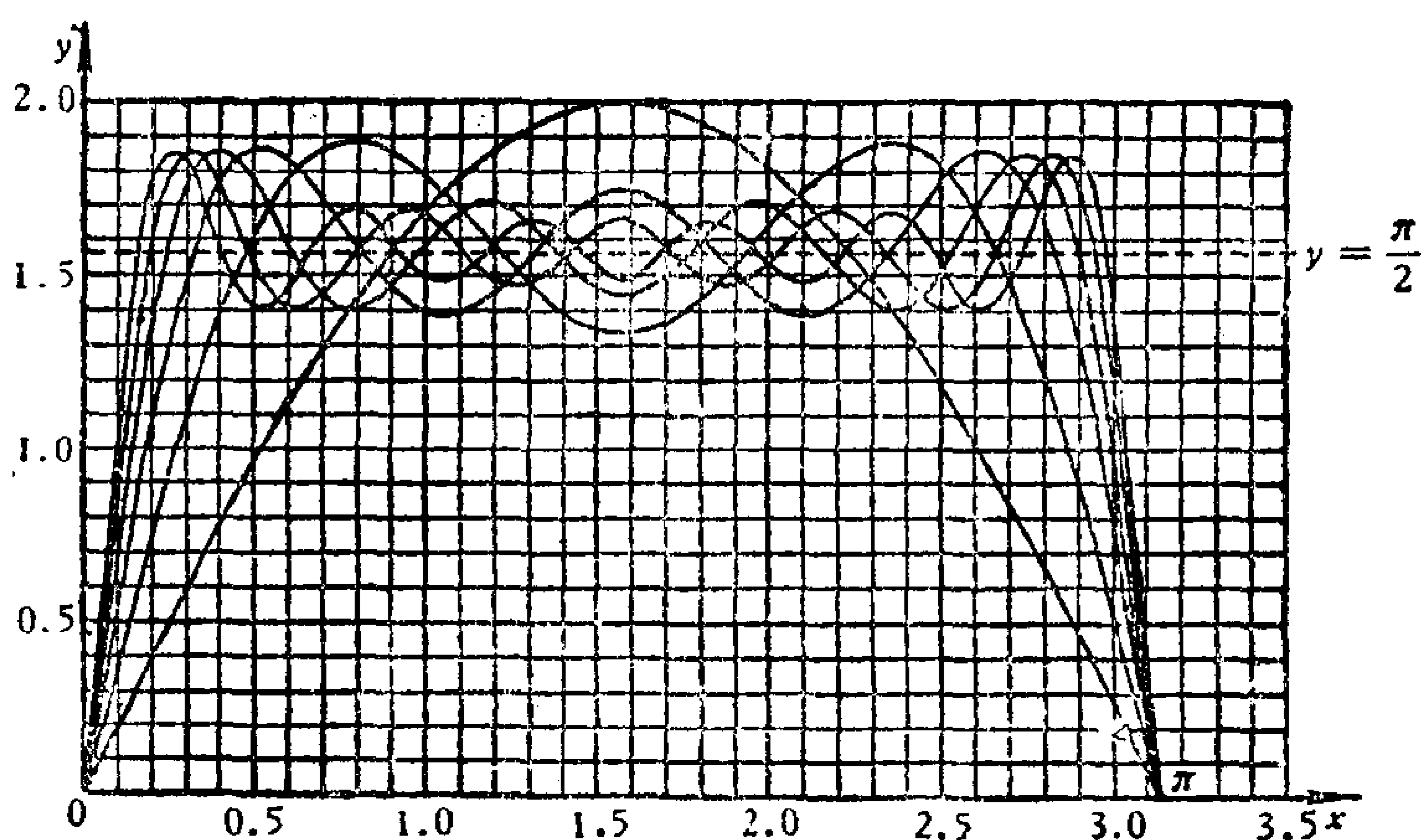


图 116

选取 $n > \dfrac{\pi}{2\delta}$, 則由(1)可得

$$\left| s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \varphi(\pi) > \frac{\pi}{2}.$$

因此尽管对每一固定的 $x(0 < x < \pi)$, 当 $n \to \infty$ 时, $s_n(x)$ 趋于 $\dfrac{\pi}{2}$. 但是 $x = 0$、$0 \leqslant y \leqslant \varphi(\pi)$中的所有的点, 都是曲綫 $y = s_n(x)$ 上面的点的极限点,而区間 $0 \leqslant y \leqslant \varphi(\pi)$的长度是 $(0, f(+0))$ 的长度的

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1.1789795\cdots$$

倍.

由于 $s_n(x)$ 为奇函数, 故在 $x = 0$ 的左边亦有类似的情况, 即在 $x = 0$ 的附近. 曲綫充满了区間 $-\varphi(\pi) \leqslant y \leqslant 0$. 这一現象叫 Gibbs 現象(图 116).

一般言之, 命函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区間 $x_0 < x < x_0 + h$ 中收斂于函数 $f(x)$, 若当 n 及

$\dfrac{1}{x-x_0}$彼此独立地趋于 $+\infty$ 时,有

$$\overline{\lim} f_n(x) > f(x_0+0)$$

或

$$\underline{\lim} f_n(x) < f(x_0+0),$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 的右方有 Gibbs 現象. 同样可以定义在 x_0 左方的 Gibbs 現象.

§8. 均 值 求 和

定理 1. 命

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n$$

表示一級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

的部分和,又

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

表示平均和. 如果

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

則也有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s.$$

証. 由假定可知,給任一 $\varepsilon > 0$, 則存在一 $N > 0$, 使 $n > N$ 时, $|s_n - s| < \varepsilon$. 命 $\bar{s}$ 为

$$|s_0 - s|,\ |s_1 - s|,\ \cdots,\ |s_N - s|$$

的上界,如此則

$$|\sigma_n - s| \leqslant \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + (s_n - s)}{n}$$

$$\leqslant \frac{N\bar{s} + (n-N)\varepsilon}{n} = \frac{N}{n}(\bar{s} - \varepsilon) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

(当 n 充分大时). 所以定理得証.

反之,如果

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s,$$

并不一定可以得出

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

例如,

$$a_n = (-1)^n,$$

則 $s_{2n} = 1$, $s_{2n+1} = 0$, 故沒有极限, 但 σ_n 的极限等于 $1/2$.

定义. 如果一个級数的 σ_n 的极限存在, 則称为平均收斂, 或称 $(C, 1)$ 收斂. σ_n 的极限 s 称为該級数的 $(C, 1)$ 和.

我們現在运用平均求和法到 Fourier 級数.

命

$$s_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

及

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n},$$

如此则

$$\sigma_n = \frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi \frac{\sin\frac{u}{2} + \sin\frac{3}{2}u + \cdots + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u) + f(x-u))du$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2 (f(x+u) + f(x-u))\,du.$$

这公式称为 Fejér 积分，其重要性在于 $\left(\sin\frac{1}{2}nu \Big/ \sin\frac{1}{2}u\right)^2$ 是定正的. 在公式中取 $f(x) = 1$，则得

$$1 = \frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2 2du,$$

因此得出

$$\sigma_n - s = \frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2 (f(x+u) + f(x-u) - 2s)du.$$

故 $f(x)$ 的 Fourier 級数的 $(C,1)$ 和是 $s(x)$ 的必要且充分条件是这积分 $\to 0$.

依旧引进

$$\phi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2s.$$

由于

$$\left|\frac{1}{n}\int_\delta^\pi \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\phi(u)\,du\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_\delta^\pi \frac{|\phi(u)|}{\sin^2\frac{1}{2}u}du$$

显然趋于 0，所以 $(C,1)$ 收斂的条件一变而为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\delta \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\phi(u)du = 0.$$

又由于

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^\delta \sin^2\frac{1}{2}nu\left(\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}u} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2}\right)\phi(u)du\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\int_0^\delta \left(\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}u} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2}\right)|\phi(u)|du \to 0,$$

所以該条件又变为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\phi(u)du=0.$$

定理 1 (Fejér). 假如 $f(x)$ 仅有第一类間断点,则 $f(x)$ 的 Fourier 級数的 $(C,1)$ 和是

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)).$$

特别是对 $f(x)$ 的連續的点, $f(x)$ 的 Fourier 級数的 $(C,1)$ 和就是 $f(x)$.

証. 在上公式中命

$$s=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)),$$

则当 $u\to 0$ 时 $\phi(u)\to 0$, 故有 η 存在,使 $u<\eta$ 时, $|\phi(u)|\leqslant\varepsilon$. 如是則

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\phi(u)du\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{\eta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varepsilon\,du+$$

$$+\frac{1}{n}\int_{\eta}^{\delta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}|\phi(u)|du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\int_0^{\eta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}du+\frac{1}{n}\int_{\eta}^{\delta}\frac{|\phi(u)|}{u^2}du=I_1+I_2\quad(\text{如是定义}).$$

現在

$$\frac{1}{n}\int_0^{\eta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}n\eta}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv<\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv$$

是一常数,故 $I_1<A\varepsilon$. 对固定的 η, 当 $n\to\infty$ 时显然 $I_2\to 0$. 定理証毕.

定理 2. 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 中連續, 則对其所包有的任何一个閉子区間 $f(x)$ 的 Fourier 級数的平均和 σ_n 一致收斂于 $f(x)$.

証明完全与定理 1 相仿,但須注意, η 的选择仅与 ε 相关而与 x 无关.

§ 9. Parseval 等 式

以往我們已經知道 Bessel 不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx.$$

我們現在要进一步証明

定理 1. 如果 $f(x)$ 是連續函数,则

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx.$$

証. 由上节已知, $\sigma_n(x)$ 一致收斂于 $f(x)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-\sigma_n(x))f(x)dx=0,$$

而

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\left(1-\frac{k}{n}\right).$$

以此代入且逐項求积分，可知

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k^2+b_k^2)\left(1-\frac{k}{n}\right)\to 0.$$

由 Bessel 不等式知道

$$S_m=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{m}(a_k^2+b_k^2)$$

收斂于 A，由定理 8.1 可知

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}S_m=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k^2+b_k^2)\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

也收斂于 A，卽得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

这式子称为 Parseval 等式.

命另一連續函数 $g(x)$ 的 Fourier 展开式是

$$\frac{1}{2}a_0'+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k'\cos kx+b_k'\sin kx),$$

則由

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[(f(x)+g(x))^2-f^2(x)-g^2(x)]dx$$

$$=\frac{1}{2}[(a_0+a_0')^2-a_0^2-a_0'^2]$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\{(a_k+a_k')^2-a_k^2-a_k'^2+(b_k+b_k')^2-b_k^2-b_k'^2\}$$

可得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\,dx=\frac{1}{2}a_0a_0'+\sum_{k=1}^{\infty}(a_ka_k'+b_kb_k').$$

这称为 Plancherel 关系式.

这些公式在很普遍的假定下仍然正确. 但为了簡单計，我們不贅述了.

§ 10. Fourier 級数可以逐項求积分

定理 1. 任何一个 Fourier 級数，不管它是收斂或发散，我們可以在两限之間逐項求

积分．积出后的級数的和等于該函数的积分的 Fourier 級数。

命 $f(x)$ 的 Fourier 系数是 a_n，b_n，現在考慮函数

$$F(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{1}{2}a_0\right)dt.$$

如此則 $F(x)$ 是周期的，連續的．

又命

$$f_1(t)=\begin{cases}f(t)-\frac{1}{2}a_0, & \text{当 } f(t)-\frac{a_0}{2}\geqslant 0,\\ 0, & \text{当 } f(t)-\frac{a_0}{2}<0,\end{cases}$$

$$f_2(t)=\begin{cases}f(t)-\frac{1}{2}a_0, & \text{当 } f(t)-\frac{a_0}{2}<0,\\ 0, & \text{当 } f(t)-\frac{a_0}{2}\geqslant 0,\end{cases}$$

因此

$$f(t)-\frac{a_0}{2}=f_1(t)+f_2(t).$$

因为

$$\int_0^x f_1(t)\,dt,\quad \int_0^x -f_2(t)\,dt$$

都是遞增函数，而

$$F(x)=\int_0^x f_1(t)\,dt-\int_0^x(-f_2(t))\,dt,$$

因此 $F(x)$ 是遞增函数的差．由定理 5.3，所以有收斂的 Fourier 級数

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx),$$

此处

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}-$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)-\frac{1}{2}a_0\right)\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=-\frac{b_n}{n}$$

及

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(-F(x)\frac{\cos nx}{n}\right)_0^{2\pi}+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)-\frac{1}{2}a_0\right)\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_n}{n}$$

（注意 $F(2\pi)=F(0)=0$）．所以

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}.$$

命 $x=0$，即得

$$\frac{1}{2}A_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

合計

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx+b_n(1-\cos nx)}{n},$$

即得定理.

由此也順便証明了

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

收斂.

本定理还有另一个有趣的証明. 已知

$$\frac{\sin(x-t)}{1}+\frac{\sin 2(x-t)}{2}+\cdots=\phi(t),$$

$\left(这儿\ \phi(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\pi-(x-t)]、若\ 0<x-t<2\pi\\ 0, \quad 若\ x-t=0,2\pi,\end{cases}\right)$ 囿收斂,故可乘以 $f(t)/\pi$ 且逐项积分. 由 0 到 2π 积分,左边等于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin n(x-t)f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n},$$

而右边等于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(t)f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{x-2\pi}^{x}\phi(t)f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{x-2\pi}^{x}\frac{1}{2}(\pi-x+t)f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big[(\pi-x+t)F(t)\Big]_{x-2\pi}^{x}-\frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x}F(t)dt=F(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)dt$$

(用了 $F(x-2\pi)=F(x)$ 和 $\frac{a_0}{2}\int_{x-2\pi}^{x}\frac{1}{2}[\pi-(x-t)]dt=0$)、定理証毕.

§ 11. Fourier 系数的性質

由前已知

$$a_k\to 0,\quad b_k\to 0.$$

我們現在加強条件来証明更明确的結果,例如,$f(x)$ 是单調上升有界函数,则由第二中値公式

$$\int_a^{\beta}f(x)\cos kx\,dx=f(\beta)\int_{\zeta}^{\beta}\cos kx\,dx=O\left(\frac{1}{k}\right),$$

即得

$$a_k=O\left(\frac{1}{k}\right),\quad b_k=O\left(\frac{1}{k}\right). \tag{1}$$

如果区間$(0,2\pi)$可以分为有限段,而每一段都是单調的,以上的結果(1)仍然成立.

如果 $f(x)$ 的微商有以上的性質,则由分部积分法可知

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx=f(x)\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin kx\,dx$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin kx\,dx=O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

所以有

$$a_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad 及 \quad b_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

同法可以証明，如果 $f(x)$ 的 l 次微商有以上的性質，則

$$a_k = O\left(\frac{1}{k^{l+1}}\right), \; b_k = O\left(\frac{1}{k^{l+1}}\right).$$

l 愈大，Fourier 級数收斂得愈快. 当 $l = 1$ 时，

$$\left|\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} |a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leqslant \frac{1}{2}|a_0| + O\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right),$$

所以 Fourier 級数一致收斂，且絕对收斂.

如果一个函数仅有有限个間断点，我們可以用下法来做出一个沒有間断点的函数.

由例 5.1 已知

$$f(x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k} + \cdots$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} x, & 若 \quad -\pi < x < \pi, \\ 0, & 若 \quad x = \pm\pi \end{cases}$$

仅在点 $x = \pi$ 有間断点，而且 $f(\pi - 0) = \frac{1}{2}\pi$, $f(\pi + 0) = -\frac{1}{2}\pi$, 考虑函数

$$g(x) = af(x + \pi - x_0) + b.$$

这是一个在 $x = x_0$ 时有間断点的函数，而

$$g(x_0 + 0) = -\frac{1}{2} a\pi + b, \quad g(x_0 - 0) = \frac{1}{2} a\pi + b,$$

解得

$$b = \frac{1}{2}(g(x_0 + 0) + g(x_0 - 0)), \quad a = \frac{1}{\pi}(g(x_0 - 0) - g(x_0 + 0)),$$

即如果 $g(x)$ 是一个仅在 $x = x_0$ 时有間断点的函数，而且 $g(x_0 + 0)$ 与 $g(x_0 - 0)$ 都存在，它的 Fourier 級数等于

$$g(x) = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin k(x + \pi - x_0)}{k} + b$$

$$= b + a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\cos k(\pi - x_0) \sin kx + \sin k(\pi - x_0) \cos kx).$$

如果一个函数有有限个間断点，并且在这些間断点的左右极限都存在，則我們可以減掉有限个上述的函数使它变为連續的.

所減去的这些函数是"直綫周期函数"，因而在計算时可以先減去几个直綫周期函数，使得所剩下的函数的 Fourier 級数一致收斂.

这个方法当然可以用来处理有以下性質的函数：可以把区間分为有限段，在每一段中

都有 l 次微商(参考 Euler 求和公式).

§ 12. Fourier 級数的其他形式

先討論复数形式的 Fourier 級数,現在是

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

此处

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

讀者試証出与前相仿的結果.

又如果周期是 $2\pi\lambda$, 則我們有

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{kx}{\lambda} + b_k \sin\frac{kx}{\lambda}\right),$$

此处

$$a_k = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\cos\frac{kx}{\lambda}dx,\quad b_k = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\sin\frac{kx}{\lambda}dx.$$

命

$$a_k = \rho_k \sin\varphi_k,\quad b_k = \rho_k\cos\varphi_k,$$

則得

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \sin\left(\frac{kx}{\lambda} + \varphi_k\right).$$

独項

$$y_k = \rho_k \sin\left(\frac{kx}{\lambda} + \varphi_k\right)$$

在物理上代表調和振动,振幅就是 ρ_k, 而 $2\pi\lambda$ 是周期, φ_k 是初位相.

§ 13. 实用調和分析——有限調和分析

把已知函数展开成 Fourier 級数的运算叫做調和分析.如果 $f(x)$ 是由分析方法定义出来的,而刚好又不难算出定积分 $C_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx$ 的数値来,則这个函数的 Fourier 展开式便立刻得到. 但如果 $f(x)$ 仅是由若干实驗数据所給定的,或者即使 $f(x)$ 由分析方法所定义,而 C_m 不易算出,那时就出現了如何去找 Fourier 系数的問題了. 解这样問題的运算称为实用調和分析. 人們往往容易产生这样的錯覚:当取定若干分点后,愈多算几項,就会得到愈精密的結果. 我們将着重指出,事实上幷不然,过多的計算不仅浪費人力,而且会导致愈来愈大的誤差. 我們在这儿所介紹的有限調和分析的着眼点也就在于此. 本节用的方法是"从有限到有限",幷研究了由有限多个数据所应計算的最恰当的項数.

先从复数形式的 Fourier 級数講起. 假定在 $[-\pi, \pi]$ 中給定函数 $f(x)$ 的 $n(=2n'+1)$ 个数据

$$y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right),\ l = 0、\pm 1, \cdots, \pm n' \tag{1}$$

利用

$$\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i l m/n} = \begin{cases} 0, & 若\ n \nmid m;^{1)} \\ 1, & 若\ n \mid m, \end{cases} \tag{2}$$

可以从

$$y_l = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{2\pi i l m/n} \quad |l| \leqslant n' \tag{3}$$

中定出 C'_m 来．定出 C'_m 的方法是乘(3)以 $e^{-2\pi i l q/n}$，而对 l 加之，由(2)得出

$$\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l q/n} = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m \sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i(m-q)l/n} = nC'_q. \tag{4}$$

因此，我們建議用

$$S_n(x) = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx}、C'_m = \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \tag{5}$$

来逼近 $f(x)$．現在来估計 $S_n(x)$ 与 $f(x)$ 的誤差．

定理 1． 假如 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 中有 $r(\geqslant 2)$ 阶連續微商，各阶微商均有周期 2π、且 $|f^{(r)}(x)| < C$，則

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{6}$$

証．已知

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx},\ C_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx, \tag{7}$$

分部积分 r 次得

$$C_m = \frac{1}{2\pi(im)^r}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x)e^{-imx}\,dx,$$

所以

$$|C_m| < \frac{C}{|m|^r}.$$

因此

$$\left|f(x) - \sum_{m=-n'}^{n'} C_m e^{imx}\right| \leqslant \sum_{|m|>n'} |C_m|$$

$$< 2\sum_{m=n'+1}^{\infty} \frac{C}{m^r} < 2C\int_{n'}^{\infty}\frac{dx}{x^r} = \frac{2C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{8}$$

当 $|m| \leqslant n'$ 时

---

1) $a|b$ 表示 a 能整除 b，$a \nmid b$ 表示 a 不能整除 b．

$$C_m - C'_m = C_m - \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n}$$

$$= C_m - \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} e^{-2\pi i l m/n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q e^{2\pi i q l/n}$$

$$= C_m - \frac{1}{n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-n'}^{n'} C_q e^{2\pi i (q-m) l/n}$$

$$= C_m - \sum_{\substack{q=-\infty \\ n|(q-m)}}^{\infty} C_q,$$

因此

$$|C_m - C'_m| \leqslant \sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' |C_{m+nt}|,$$

此处 $\sum'$ 表示除去 $t=0$ 这一項. 因此

$$\left| \sum_{m=-n'}^{n'} (C_m - C'_m) e^{imx} \right| \leqslant \sum_{m=-n'}^{n'} \sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' |C_{m+nt}|$$

$$\leqslant \sum_{m=-n'}^{n'} \sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' \frac{C}{|m+nt|^r} = 2C \sum_{l=n'+1}^{\infty} \frac{1}{l^r}$$

$$\leqslant \frac{2C}{(r-1)n'^r} \tag{9}$$

(任一整数 l 可以唯一地表成为 $nt+m(|m| \leqslant n')$ 的形式, 但 $t \neq 0$, 所以从所有的整数中除去适合于 $|l| \leqslant n'$ 之諸整数,故得所云).

因此,由(7),(8),(9)可得

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}.$$

定理証完.

有时为了減少計算量,在有了 n 个数据 $y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(|l| \leqslant n')$ 之后, 我們只希望計算 $2k+1$ 个系数 $C'_m(|m| \leqslant k)$, 此处 $k < n'$. 算法如下:定出 $C'_m(|m| \leqslant k)$ 来使

$$\sum_{l=-n'}^{n'} \left| y_l - \sum_{m=-k}^{k} C'_m e^{2\pi i l m/n} \right|^2$$

取最小值.

$$\sum_{l=-n'}^{n'} \left| y_l - \sum_{m=-k}^{k} C'_m e^{2\pi i l m/n} \right|^2$$

$$= \sum_{l=-n'}^{n'} \left(y_l - \sum_{q=-k}^{k} C'_q e^{2\pi i l q/n} \right) \left(\bar{y}_l - \sum_{r=-k}^{k} \bar{C}'_r e^{-2\pi i l r/n} \right)$$

$$= \sum_{l=-n'}^{n'} |y_l|^2 + n \sum_{m=-k}^{k} |C'_m|^2 - \sum_{q=-k}^{k} \sum_{l=-n'}^{n'} \bar{y}_l C'_q e^{2\pi i l q/n} -$$

$$- \sum_{r=-k}^{k} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \bar{C}'_r e^{-2\pi i l r/n}$$

$$= n \sum_{m=-k}^{k} \left(C'_m - \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \right) \left(\bar{C}'_m - \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} \bar{y}_l e^{2\pi i l m/n} \right) +$$

$$+ \sum_{l=-n'}^{n'} |y_l|^2 - \frac{1}{n} \sum_{m=-k}^{k} \left| \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \right|^2$$

$$\geqslant \sum_{l=-n'}^{n'} |y_l|^2 - \frac{1}{n} \sum_{m=-k}^{k} \left| \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \right|^2,$$

此处等号成立之充要条件为

$$C'_m = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n}.$$

因此仍用

$$S_{2k+1}(x) = \sum_{m=-k}^{k} C'_m e^{imx}, \quad C'_m = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \tag{10}$$

来逼近 $f(x)$.

在定理 1 的条件下,与定理 1 相仿可得

$$|f(x) - S_{2k+1}(x)| < \frac{2C}{(r-1)} \left(\frac{1}{n'^{r-1}} + \frac{1}{k^{r-1}} \right).$$

这建議我們,如果只計算 $2k+1$ 項,可以少用一些数据。

在实际計算的时候, $S_n(x)$ 有以下的表达式:

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \cdot \frac{\sin\left(\frac{nx}{2} - \pi l\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)}. \tag{11}$$

这个式子的証明如下:

$$S_n(x) = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{m=-n'}^{n'} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} e^{imx}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \sum_{m=-n'}^{n'} e^{im(x-2\pi l/n)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(n' + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(\frac{nx}{2} - \pi l\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)}.$$

如果 $f(x)$ 是一个以 2π 为周期的实函数，则

$$S_n(x) = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx}$$

$$= C'_0 + \sum_{m=1}^{n'} (C'_m e^{imx} + C'_{-m} e^{-imx}),$$

这儿

$$C'_0 = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l = a'_0/2,$$

$$C'_m = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos \frac{2\pi l m}{n} - i \sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin \frac{2\pi l m}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(a'_m - b'_m i),$$

$$C'_{-m} = \frac{1}{2}(a'_m + b'_m i).$$

因此

$$C'_m e^{imx} + C'_{-m} e^{-imx}$$

$$= \frac{1}{2}(a'_m - b'_m i)(\cos mx + i \sin mx) +$$

$$+ \frac{1}{2}(a'_m + b'_m i)(\cos mx - i \sin mx)$$

$$= a'_m \cos mx + b'_m \sin mx.$$

因此

$$S_n(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{n'} (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx), \qquad (12)$$

此处

$$a'_0 = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l,\quad a'_m = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos \frac{2\pi l m}{n},$$

$$b'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin\frac{2\pi lm}{n}. \tag{13}$$

这就是实数形式的有限 Fourier 級数.

定理 2. 如果 $f(x)$ 为在 $[0, 2\pi]$ 中有 $r(\geqslant 2)$ 阶連續微商的实函数，各阶微商都有周期 2π，且 $|f^{(r)}(x)| < C$，则

$$\left| f(x) - \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \frac{\sin\left(\frac{1}{2}nx - \pi l\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)} \right| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{14}$$

如果分点不是等距离的，即已知

$$y_i = f(x_i),\ i = 1, 2, \cdots, n(=2n'+1),$$

則可由联立方程組

$$y_i = \frac{a'_0}{2} + \sum_{l=1}^{n'} (a'_l \cos lx_i + b'_l \sin lx_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$y = f(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{l=1}^{n'} (a'_l \cos lx + b'_l \sin lx)$$

中消去 a'_0, a'_l, b'_l 而得出 y 与 $y_1, \cdots, y_n$ 的关系. 因而問題归結为解联立方程組的問題了.

習題 1. 研究分点个数 n 为偶数的情况.

附記. 有些书上利用矩形公式来近似計算定义 a'_m 与 b'_m 的积分，因此得出

$$a_m \doteq a'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos\frac{2\pi lm}{n},\quad b_m \doteq b'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin\frac{2\pi lm}{n},$$

然后用

$$S_{2r+1}(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{r} (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx)$$

来逼近 $f(x)$. 虽然用这一方法得出的 $S_{2r+1}(x)$ 的表达式仍无两样，但由于

$$a'_m = a'_{m+n},\quad b'_m = b'_{m+n},$$

所以級数

$$\frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx)$$

是发散的(除非 $a'_1 = \cdots = a'_{n'} = b'_1 = \cdots = b'_{n'} = 0$). 因此取 Fourier 級数的項数愈多，变化亦愈大. 如果原来的函数 $f(x)$ 有一定的光滑性(例如有連續的高阶微商等)，用这个方法来处理，当項数算多了，偏差反而会更大，換言之，这个方法容易使人产生引入迷途的可能性——謬以为項数愈多愈精密. 另一方面，当給了几个离散的数据时，亦不必用連續性的方法来处理.

关于实用調和分析进一步的討論，請讀者看华罗庚与王元的“数值积分及其应用”一书.

§ 14. Fourier 积分

把 §12 的公式写成为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda}f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda}f(t)\cos\frac{n(x-t)}{\lambda}\,dt. \tag{1}$$

現在使 $\lambda\to\infty$，如果命 $u_n=\frac{n}{\lambda}$，則該級数等于

$$\frac{\varphi(u_0)}{2\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)\varphi(u_n), \tag{2}$$

此处

$$\varphi(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda}f(t)\cos u(x-t)\,dt. \tag{3}$$

如果我們且不管 $\varphi(u)$ 与 λ 的关系，則 (2) 式就相似于 Riemann 积分的和，所以当 $\lambda\to\infty$ 时，我們得出

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x-t)u\,f(t)\,dt. \tag{4}$$

这称为 Fourier 积分公式. 犹之于 Fourier 級数在有限范围内表示一个函数，Fourier 积分在无限范围内表示一个函数.

要把以上方法严格化并不簡单，我們現在用另一方法来处理公式(4).

假定

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$$

是存在的，則积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)f(t)\,dt$$

对 u 在任一有限区間內一致收斂，故可由 0 到 U 对 u 积分，且交換符号，卽得

$$\int_0^U du\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt.$$

給与 $\varepsilon>0$，可取 T 充分大，使

$$\int_{-\infty}^{-T}|f(t)|\,dt<\varepsilon,\quad \int_T^{\infty}|f(t)|\,dt<\varepsilon.$$

取固定的 x，并假定 $T>|x|+1$，則对所有的 U，

$$\left|\int_{-\infty}^{-T}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt\right|<\varepsilon,\quad \left|\int_T^{\infty}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt\right|<\varepsilon.$$

固定 T，由 Riemann-Lebesque 定理可知，当 $U\to\infty$ 时，积分

$$\int_{-T}^{x-\delta}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt,\qquad \int_{x+\delta}^{T}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt$$

都 $\to 0$，所以

$$\frac{1}{\pi}\int_0^U du\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt+o(1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin Ut}{t}\{f(x+t)+f(x-t)\}dt+o(1).$$

如此，把我們的問題一变而为前所討論过的 Dirichlet 积分相仿的問題了，即如果假定

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$$

存在以及在 $t=x$ 附近 $f(x)$ 是两递增函数之差，则

$$\lim_{U\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^U du\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)f(t)\,dt=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

§15. Fourier 变 换

如果 $f(x)$ 是偶函数，则 Foureir 积分公式(14.4)变为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}(\cos xu\ \cos tu+\ \sin xu\sin tu)f(t)\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos xu\,du\int_0^{\infty}\cos tu\,f(t)\,dt, \tag{1}$$

这称为 Fourier 余弦公式．又如果 $f(t)$ 是奇函数，则得 Fourier 正弦公式

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin xu\,du\int_0^{\infty}\sin tu\,f(t)\,dt. \tag{2}$$

如果我們命

$$g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos xt\,f(t)\,dt,$$

则由(1)得出

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos xt\ g(t)\,dt,$$

即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 处于互逆的关系．如此所关联着的一对函数，彼此称为 Fourier 余弦变换．

当然这是仅就形式言之，严格些說，在我們常遇到的条件下，必須修改 $f(x)$ 的数值为

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)).$$

同样

$$h(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sin xt\,f(t)\,dt,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sin xt\ h(t)\,dt$$

被称为 Fourier 正弦变换．注意，这也須修改 $f(x)$ 的数值为 $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$．在 $x=0$ 时，更必須注意，我們是假定了 $f(x)$ 是奇函数才获得这公式的，所以 $f(0)$ 的数值是 0.

例 1.　函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x>1 \text{ 时}\end{cases}$$

的 Fourier 余弦变换是

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du\int_0^\infty f(t)\cos ut\, dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du\int_0^1 \cos ut\, dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos ux \sin u}{u}du=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时},\\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

例 2. 取

$$f(x)=e^{-\beta x},\quad \beta>0.$$

它的 Fourier 正弦变换等于

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta t}\sin ut\, dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{u^2+\beta^2},$$

所以

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{u^2+\beta^2}\sin ux\, du=\begin{cases}e^{-\beta x} & \text{当 } x>0,\\ 0 & \text{当 } x=0.\end{cases}$$

同样可証

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux}{u^2+\beta^2}du=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta x}.$$

例 3. 函数

$$x^{-\frac{1}{2}},\ e^{-\frac{1}{2}x^2},\ \operatorname{sech}x\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

是它們自己的 Fourier 余弦变換,而函数

$$x^{-\frac{1}{2}},\ xe^{-\frac{1}{2}x^2},\ \frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1}-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$$

是它們自己的 Fourier 正弦变換.

§ 16. Poisson 公 式

假定 $f(x)$ 是一个在 $(0,\infty)$ 中定义了的函数,它連續而且当 $x\to\infty$ 时单調递減趋近于0,并假定

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

存在,命 $\alpha>0$, $\alpha\beta=2\pi$, 且 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 余弦变換,則得

$$\sqrt{\alpha}\left\{\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^\infty f(n\alpha)\right\}=\sqrt{\beta}\left\{\frac{1}{2}g(0)+\sum_{n=1}^\infty g(n\beta)\right\}. \tag{1}$$

这公式称为 Poisson 公式.

証. 由 $g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos tx\, dt$ 可得

$$\sqrt{\beta}\left\{\frac{1}{2}g(0)+\sum_{m=1}^n g(m\beta)\right\}=$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,dt + \sum_{m=1}^{n}\int_0^\infty f(t)\cos m\beta t\,dt\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m\beta t\right)dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\beta}}\int_0^\infty f\left(\frac{x}{\beta}\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos mx\right)dx \text{（换变数 } \beta t = x\text{）}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\pi}\int_0^\infty f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\pi}\left(\int_0^\pi f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx\right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx\right). \tag{2}$$

用第二中值公式到积分上，則得

$$a_m = \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$= f\left(\frac{(2m-1)\pi}{\beta}\right)\int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx.$$

由于

$$\left|\int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{(-1)^m}{x-2m\pi}\right)dx\right|$$

$$\leqslant \int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi}\left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{(-1)^m}{x-2m\pi}\right|dx = O(1)$$

及

$$\left|\int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x-2m\pi}\,dx\right| = \left|\int_{-\pi}^{(\xi-2m)\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{y}\,dy\right|$$

$$= \left|\int_{-\pi(n+\frac{1}{2})}^{(\xi-2m)(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin z}{z}\,dz\right| = O(1),$$

这儿用了 $\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz$ 是收斂的，因而得出

$$a_m = O\left(f\left(\frac{(2m-1)\pi}{\beta}\right)\right).$$

从而

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m = O\left(\sum_{m=1}^{\infty} f\left(\frac{(2m-1)\pi}{\beta}\right)\right) = O\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{(2m-1)\pi}{\beta}}^{\frac{(2m+1)}{\beta}} f(t)\,dt + f\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right)$$
$$= O\left(\int_0^{\infty} f(t)\,dt\right) = O(1),$$

换言之,公式(2)是一个对 n 一致收斂的級数. 命 $n\to\infty$, 并且每一項如此取极限,由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{2}f(0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx = f\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right) = f(m\alpha),$$

得出最后結論

$$\sqrt{\beta}\left\{\frac{1}{2}g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} g(n\beta)\right\} = \sqrt{\alpha}\left\{\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\right\}.$$

例 1. 取 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, 則

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+4n^2\pi^2}.$$

例 2. 証明: 若 $x>0$, 則

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi^2/x^2}. \tag{3}$$

在 Poisson 公式中取 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, 則 $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 又取 $\beta = \sqrt{2}\,x$, $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{x}$, 則得

$$\sqrt{\sqrt{2}\,x}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}\right\} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\,\pi}{x}}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{x^2}}\right\}.$$

故得公式(3).

§ 17. Fourier 变換的复数形式

函数

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{itx}\,dt \tag{1}$$

称为 $f(x)$ 的 Fourier 变換,由此得出

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} f(t)\,e^{itx}dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\,e^{itx}dt\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\left(f(t)\,e^{itx} + f(-t)\,e^{-itx}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \{[f(t) + f(-t)]\cos tx + i[f(t) - f(-t)]\sin tx\}\, dt. \qquad (2)$$

命

$$G(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{f(t) + f(-t)}{2} \cos tx\, dt \qquad (3)$$

及

$$H(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{f(t) - f(-t)}{2} \sin tx\, dt, \qquad (4)$$

显然可見 $G(-x) = G(x)$, $H(-x) = -H(x)$. 用反轉公式可知，

$$\frac{f(t) + f(-t)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G(x) \cos xt\, dx.$$

由于 $G(x)$ 是偶函数,所以

$$\int_{-\infty}^\infty G(x) \cos xt\, dx = 2\int_0^\infty G(x) \cos xt\, dx$$

及

$$\int_{-\infty}^\infty G(x) \sin xt\, dx = 0.$$

因此得到

$$f(t) + f(-t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty G(x)(\cos xt - i\sin xt)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty G(x) e^{-ixt} dx. \qquad (5)$$

又由于 $H(x)$ 是奇函数,所以

$$\int_{-\infty}^\infty H(x) \cos xt\, dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^\infty H(x) \sin xt\, dx = 2\int_0^\infty H(x) \sin xt\, dx.$$

因而由反轉公式得出

$$f(t) - f(-t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty (-iH(x)) \sin xt\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty H(x) e^{-ixt} dx. \qquad (6)$$

(5),(6)相加得

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty (G(x) + H(x)) e^{-ixt} dx.$$

由(2),(3),(4)卽得(1)的反轉公式

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(x) e^{-ixt} dx. \qquad (7)$$

也可以由(7)推出(1)来,讀者試举出在怎样的条件下,反轉公式(7)能够成立.

§18. 其 他 变 换

在常用的变换中,我們介紹以下的两种,而不給出这些公式成立的条件.

命

$$\phi(s) = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx,$$

这称为函数 $f(x)$ 的 Laplace 变换. 把变数 s 写成为 $\sigma + it$、则得

$$\phi(\sigma + it) = \int_0^\infty f(x) e^{-\sigma x} e^{-itx} dx.$$

当固定 t 为变数，则

$$\phi(\sigma + it)$$

是函数

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, f(x) e^{-\sigma x} & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

的 Fourier 变换

$$\phi(\sigma + it) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-itx} dx.$$

由反轉公式得

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\sigma + it) e^{itx} dt,$$

卽得

$$F(x) e^{\sigma x} = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \phi(s) e^{sx} ds.$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \phi(s) e^{sx} ds = \begin{cases} f(x) & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

(当 $x = 0$ 时，这积分的数值等于 $\frac{1}{2} f(0)$)，这公式称为 Laplace 的反轉公式.

又我們有 Mellin 变換

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx,$$

卽

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{\sigma + it - 1} dx.$$

換变数 $y = \log x$，则得

$$\mathfrak{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^y) e^{\sigma y} e^{ity} dy,$$

卽 $\mathfrak{F}(s)$ 是函数 $\sqrt{2\pi}\, f(e^y) e^{\sigma y}$ 的 Fourier 变換，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(s) e^{-ity} dt = 2\pi f(e^y) e^{\sigma y}.$$

卽得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(s) e^{-(\sigma + it) y} dt = f(e^y).$$

卽得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathfrak{F}(s) x^{-s} ds = f(x).$$

这称为 Mellin 变換的反轉公式.

第二十章　常微分方程組

§1. 化任意的微分方程組为一阶微分方程組

假定有方程組

$$\Phi_i\left(x;\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}};\ \cdots;\ y_n,\ \frac{dy_n}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}\right)=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

我們可以如下引进新变数 $y_i^{(k)}$（及命 $y_i=y_i^{(0)}$）：

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx}=y_i^{(k+1)},\quad k=0,1,2,\cdots,m_i-2;\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

因而得出新的方程組：(2)与

$$\Phi_i\left(x;y_1^{(0)},\ y_1^{(1)},\ \cdots,\ y_1^{(m_1-1)},\ \frac{dy_1^{(m_1-1)}}{dx};\ \cdots;\ y_n^{(0)},\ y_n^{(1)},\ \cdots,\ y_n^{(m_n-1)},\ \frac{dy_n^{(m_n-1)}}{dx}\right)=0,$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{3}$$

如果方程組(1)有解，則能从 $y_i(x)$ 得出 $y_i(x)$ 的微商来，使它們适合于(2)与(3)．反之，如果有一組函数 $y_i^{(k)}$ 适合于(2)与(3)，亦易証函数 $y_i^{(0)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 一定适合于(1)，也就是在方程組(2)中的 k 按次取 $0,\ 1,\ 2,\cdots,\ m_i-2$，即得出

$$y_i^{(k+1)}=\frac{d^{(k+1)}y_i^{(0)}}{dx^{k+1}}.$$

因此方程組(1)与方程組(2)，(3)是等价的．

对

$$\frac{dy_1^{(m_1-1)}}{dx},\ \cdots,\ \frac{dy_n^{(m_n-1)}}{dx}$$

來說，(3)是 n 个方程 n 个未知数的方程組．我們假定它們已經解出，即

$$\frac{dy_i^{(m_i-1)}}{dx}=\varphi_i(x;\ y_1^{(0)},\ \cdots,\ y_1^{(m_1-1)};\ \cdots;\ y_n^{(0)},\ \cdots,\ y_n^{(m_n-1)}),$$
$$i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

連同(2)式在內得出一方程組，它是方程組

$$\frac{dy_i}{dx}=\varphi_i(x;y_1,\ \cdots,\ y_N),\quad 1\leqslant i\leqslant N \tag{5}$$

的特例．今后我們仅討論形如(5)的方程組．

在处理方程組(5)时，最好有些矩陣論的知識作为工具．我們現在假定已經知道了以下的最簡单的結果．

定义 1.　假定

$$\left.\begin{array}{l} u_1=u_1(x_1,\ \cdots,\ x_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_m=u_m(x_1,\ \cdots,\ x_n)\end{array}\right\} \tag{6}$$

是 n 个变数的 m 个連續函数，而且有一阶連續偏微商．如果有一非零函数

$$F(u_1, \cdots, u_m)$$

存在，当(6)代入此函数时，得出一个对 $x_1, \cdots, x_n$ 恆等于 0 的式子，則这 m 个函数称为函数相关，不然，則称为函数无关．

主要的結果是

定理 1. 命 $m = n$，(6) 所定义的函数是函数相关的必要且充分条件是函数行列式(或 Jacobian)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

如果在某一点函数行列式之值 $\neq 0$，則由

$$y_i = u_i(x_1, \cdots, x_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

可以解得在該点附近有

$$x_i = g_i(y_1, \cdots, y_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

現在的討論，实質上是限定在某一給定区域內的．引用这个結果不难找出(3)可以解成为(4)的条件．

§ 2. 常微分方程組

在 § 13.27 中已证明了以下的结果．

n 个未知函数的 n 个一阶方程所組成的微分方程組

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1, \cdots, y_n), \end{array}\right\} \tag{1}$$

在給了初始条件

$$y_1|_{x=x_0} = y_1^{(0)}, \quad \cdots, \quad y_n|_{x=x_0} = y_n^{(0)} \tag{2}$$

之后，有一个解而且仅有一个解 $y_i = \omega_i(x)$ 滿足

$$\omega_i(x_0) = y_i^{(0)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

当然，对 $f_1, \cdots, f_n$ 在 $x = x_0$, $y_1 = y_1^{(0)}, \cdots, y_n = y_n^{(0)}$ 的近旁需作些假定．为了方便起見，我们用比 § 13.27 更强些的条件：假定 f_i 在这点近旁是連續的，而且对 $y_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 有連續偏微商，这样所得出的結論也是关于在点 x_0 的近旁的．

我們改变初始条件中 $y_i^{(0)}$ 的值，則方程組(1)的一般解含有 n 个任意常数．这些常数当然可以作为初始值 $y_i^{(0)}$ 在解中出現，但也可以以更一般的形式

$$y_i = \psi_i(x, c_1, \cdots, c_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

出现.

給了 $c_1, \cdots, c_n$ 的特定値及 $x=x_0$, 则得出一組 y_i 的初始值. 反之,对任何初始值 $y_i^{(0)}$, 我們也希望由(3)能解出 $c_1, \cdots, c_n$ 的数值来,也就是希望从

$$y_i^{(0)} = \psi_i(x_0, c_1, \cdots, c_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3'}$$

中可以解出 $c_1, \cdots, c_n$. 因此我們要求 ψ_i 对变数 $c_1, \cdots, c_n$ 而言是函数无关的. 带有这样常数 $c_1, \cdots, c_n$ 的解是一般解,例如

$$y_1 = (c_1 + c_2)x + c_3, \quad y_2 = c_3x^2, \quad y_3 = x^2 + c_3x + c_1 + c_2$$

并不是一般解,因为命 $c_1 + c_2 = c$, 实质上只有两个任意常数.

从(3′)解出

$$c_i = \varphi_i(x, y_1, \cdots, y_n), \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{4}$$

这就得方程組的一般解的另一形式.

(4)中的任意一个叫做方程組(1)的一个积分. 于是,要作成(1)的一般积分,就需要有 n 个这样的积分,并且它們对 $y_1, \cdots, y_n$ 的函数行列式不为零. 这样我們便可由(4)解出 $y_1, \cdots, y_n$ 来.

方程組(1)可以写成为下面的連比形式:

$$dx = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \cdots, y_n)} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \cdots, y_n)}. \tag{5}$$

如果用 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 来代替 $x, y_1, \cdots, y_n$, 我們不难得出完全对称的形式

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}}, \tag{6}$$

这里 $X_1, \cdots, X_{n+1}$ 都是 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 的函数. 在新記号下,方程組的积分也变成

$$\varphi_i(x_1, \cdots, x_{n+1}) = c_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{7}$$

假定方程組(6)有 k 个积分

$$\varphi_i(x_1, \cdots, x_{n+1}) = c_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{8}$$

有时我們說方程組的积分不是指等式(8),而是指其左边的函数 $\varphi_i(x_1, \cdots, x_{n+1})$,也就是說,如果把方程組的任何解代入函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_{n+1})$ 中,它变为常数,这样的函数 φ 就称为方程組的一个积分,这里当然假定 $\varphi(x_1, \cdots, x_{n+1})$ 本身不是常数.

一个非常重要的性质是:方程組(1)的若干积分的函数仍然是方程組(1)的积分,也就是,如果 $F(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$ 是 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 的函数,则对变数 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 来說,函数 $F(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$ 也是方程組(1)的积分. 原因很簡单,把方程組(1)的値代入,既然 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 都是常数,当然 $F(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$ 也是常数了.

也可以直接証明:由于(8)是积分,所以

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} X_j = 0.$$

由此

$$dF=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial F}{\partial x_j}dx_j=\sum_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial\varphi_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)X_j=0,$$

即得

$$F=C.$$

假定(6)有 n 个积分(7)，而从 $x_1,\cdots,x_{n+1}$ 这 $n+1$ 个变数中可以解出 n 个来，这样解出后，一个变数为自变数，其他的是这个自变数的函数，也就是从方程組(1)的 n 个函数无关的积分(7)可以給出方程組(1)的一般积分。

例 1.

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}. \tag{9}$$

由

$$\frac{dy}{yz}=\frac{dx}{xz}$$

得

$$y=c_1x.$$

又在

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}$$

中代入 $y=c_1x$，即得

$$(1+c_1^2)xdx+zdz=0.$$

因而

$$(1+c_1^2)x^2+z^2=c_2,$$

也就是

$$x^2+y^2+z^2=c_2.$$

从而两个积分是

$$y=c_1x,\quad x^2+y^2+z^2=c_2. \tag{10}$$

不难証明，函数 $u=\frac{y}{x}$，$v=x^2+y^2+z^2$ 是函数无关的，即 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$.

第一个方程代表通过 z 軸的平面族，而第二个方程代表球心在原点的球面族。这方程組的一般积分是

$$F\left(\frac{y}{x},x^2+y^2+z^2\right)=0,$$

这里 $F=F(u,v)$ 是两个变量 u,v 的任意函数。

習題 1. 通过直綫 $x=0$, $y=0$ 外的一点，方程組(9)一定有唯一解。通过此直綫上的一点的解的情况如何？

習題 2. 解出

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z},$$

此处

$$X = ax + by + cz + d,$$
$$Y = a'x + b'y + c'z + d',$$
$$Z = a''x + b''y + c''z + d''.$$

建議:引进变数 t, 考虑

$$\frac{dt}{\lambda t} = \frac{ldx + mdy + ndz}{lX + mY + nZ} \quad \left(= \frac{dx}{X}\right).$$

求 l、m、n, λ 使

$$lX + mY + nZ = \lambda(lx + my + nz) + r.$$

根据 λ 的三值解方程組.

習题 3. 解方程組

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + T(ax + by) = T_1, \\ \dfrac{dy}{dt} + T(a'x + b'y) = T_2, \end{cases}$$

此处 T、T_1, T_2 是 t 的函数.

習题 4. 解方程組

(i) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{2}{t}(x - y) = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{t}(x + 5y) = t, \end{cases}$$

(ii) $$\begin{cases} lt\dfrac{dx}{dt} = mn(y - z), \\ mt\dfrac{dy}{dt} = nl(z - x), \\ nt\dfrac{dz}{dt} = lm(x - y). \end{cases}$$

(iii) $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$,

此处 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{a} = (a, b, c)$.

§3. 質点的运动方程

用 t 代表时間、$\mathbf{r} = (x, y, z)$ 代表一質点在空間的位置, m 代表它的質量. $\mathbf{r}$ 是 t 的矢量函数, 速度矢量是

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \tag{1}$$

加速度矢量是

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right). \tag{2}$$

Newton 的基本定律是：質量乘加速度等于力，用方程表出为

$$ma = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = (X, Y, Z), \tag{3}$$

这里 $\mathbf{F}$ 是力，也就是如果在空間每一点有一力 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ 作用于这質点，則这質点在空間的运动方程是(3)。

分成分量写出得

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

命 $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$, 則得六个方程所形成的微分方程組：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u, \quad & m\frac{du}{dt} &= X, \\ \frac{dy}{dt} &= v, \quad & m\frac{dv}{dt} &= Y, \\ \frac{dz}{dt} &= w, \quad & m\frac{dw}{dt} &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

因此給了在 $t = t_0$ 时 x, y, z, u, v, w 的値，就可以唯一地解出(4)来，也就是如果在 $t = t_0$ 时，給了

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{v} = (u, v, w)$$

的数値，則可以得出方程(3′)的解来，也就是知道了初始位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ 及初始速度 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$，我們就知道質点的运动規律了.

最簡单的例子是自由落体，卽仅仅由于地心吸力把一物体向“下”拉. 取 y 軸的負方向为这方向，則力的三支量是

$$X = 0, \quad Y = -g, \quad Z = 0,$$

卽得

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0. \tag{5}$$

如果在 $t = 0$ 时，静止物体在高度 h 向下落，則得初始条件

$$\mathbf{r}_0 = (0, h, 0), \quad \mathbf{v}_0 = (0, 0, 0).$$

因而解得

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + h, \quad z = 0.$$

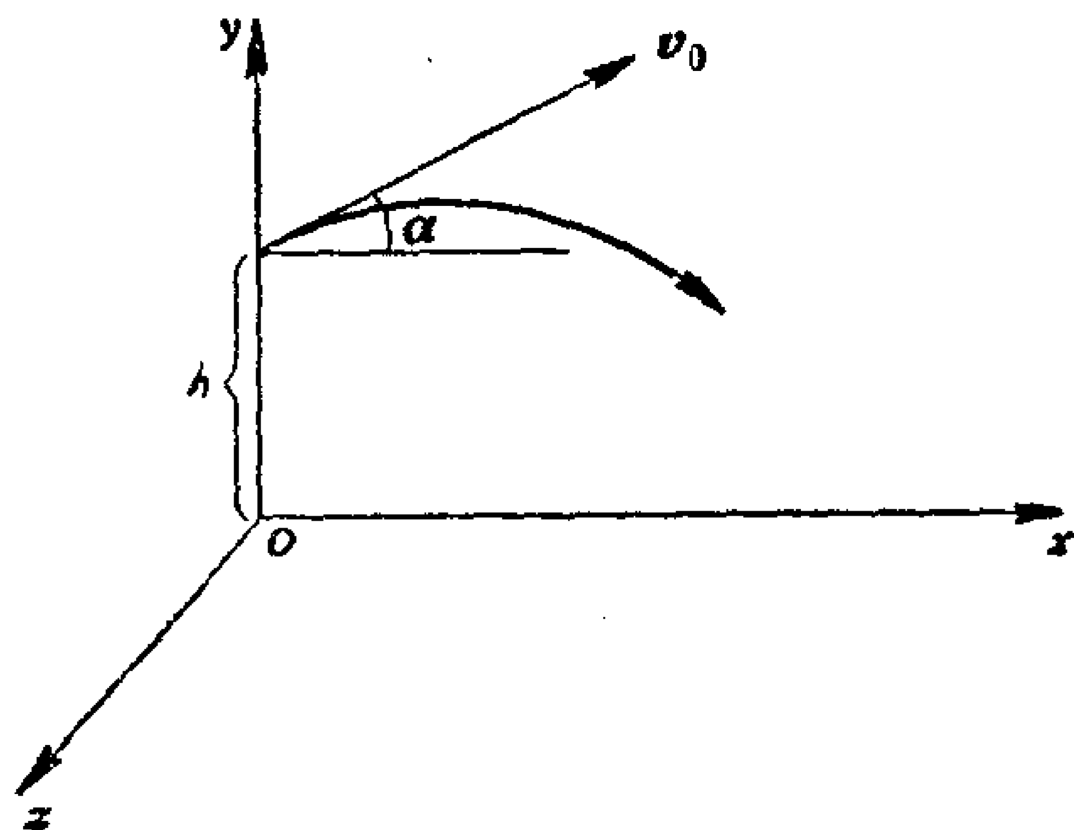


图 117

稍复杂的例子是无空气阻力的弹道：从高度 h 发射，仰角为 α，初速为 $\mathbf{v}_0$. 仍取 y 軸为垂直方向. 在 y 軸与初速矢量所决定的平面上，取定 x 軸.

如果测得初始位置 $\mathbf{r}_0 = (0, h, 0)$ 及初速为

$$\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha, 0),$$

不难求出方程組(5)的解答是

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t, \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + h, \\ z = 0. \end{cases}$$

一般講来,解方程組(3)常借助于以下一些考虑:

1) 求(3)式与矢量 $\mathbf{v}$ 的內积,得

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

卽得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

卽

$$d\left(\frac{m}{2}v^2\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{6}$$

此处

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

(6)式就是力学上的动能定理:"动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 的增加等于沿质点軌道移动 $d\mathbf{r}$, 力 $\mathbf{F}$ 所做的功".

如果力 $\mathbf{F}$ 是某一个依赖于 x, y, z 的函数 U 的偏微商,这个函数 U 称为这个力的位势函数,而 $-U$ 称为这一点的位能,卽

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

由(6)可知

$$\frac{m}{2}v^2 - U = c, \tag{7}$$

卽在运动的整个过程中,动能与位能之和恆为常数.

2) 求(3)与矢量 $\mathbf{r}$ 的矢量积,得

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{r} = \mathbf{F} \times \mathbf{r},$$

卽得

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F} \times \mathbf{r}, \tag{8}$$

$m\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ 称为动量矩. 动量矩的变化等于力矩.

如果力的方向总是指向一定点,取这点为原点,得

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

由(8)得

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=c_1,$$

$$m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=c_2,$$

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=c_3.$$

由此立刻看出

$$c_1x+c_2y+c_3z=0,$$

即軌迹在一平面上.

§4. 人造卫星的軌道方程

从地球表面上一点 P 依水平角 α，速度 v_0 射出一个質量为 m 的物体（体积比起地球来相对地很小，不妨看作一个質点），求这物体的运动軌道.

这是上节結果的一个具体的例子，我們把它講得較詳尽些，而且計算到底.

以通过发射点和地心 O 的直綫作为 y 軸，这軸和投射方向所成的平面作为 (x, y) 平面. 在这平面上通过 O 点的垂直于 y 軸的垂綫作为 x 軸，取其正向使发射方向在第一象限內.

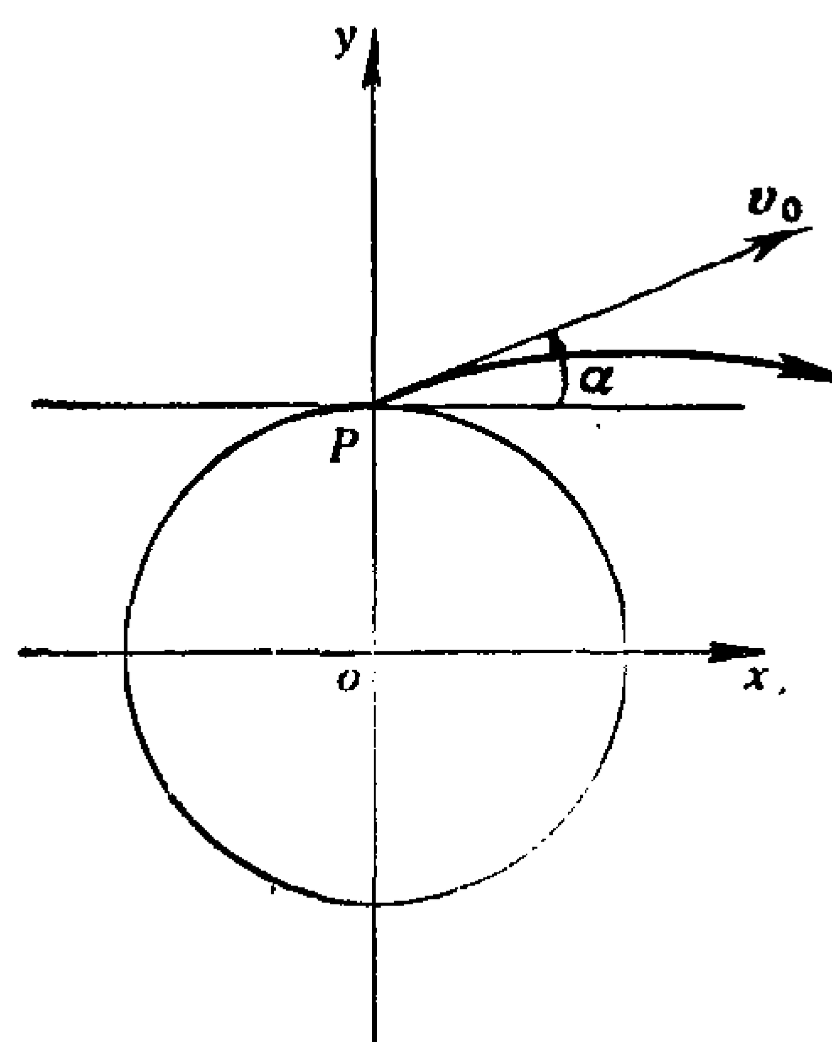


图 118

用 t 表示时間，取发射时刻为 $t=0$，物体运动的坐标用 (x, y) 表示. 由万有引力定律知道有一力

$$f\cdot\frac{mM}{x^2+y^2}$$

把物体拉向球心，其二支量是

$$\frac{-fmM}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{-fmM}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{1}$$

这里

$$M=5.98\times10^{27}\ 克 \tag{2}$$

是地球質量，而引力常数

$$f=6.685\times10^{-23}\,[公里]^3/[克][秒]^2 \tag{3}$$

（福里斯、季莫列娃著普通物理学，114 頁）.

因此得出物体的运动方程：

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{f\cdot mMx}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{fmMy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \end{cases} \tag{4}$$

这就是人造卫星的运动方程. 现在解方程(4).

由(4)可知

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0 \tag{5}$$

及

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)=$$

$$=-\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{3/2}}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{fM}{(x^2+y^2)^{3/2}}\frac{d(x^2+y^2)}{dt}. \tag{6}$$

积分(5),(6),立刻得出

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c_1 \tag{7}$$

及

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{1/2}}+c_2. \tag{8}$$

换为极坐标: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 得

$$dx=dr\cdot\cos\theta-r\sin\theta\cdot d\theta,$$
$$dy=dr\cdot\sin\theta+r\cos\theta\cdot d\theta.$$

代入(7),(8)得

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=c_1 \tag{9}$$

及

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2fM}{r}+c_2. \tag{10}$$

消去 $\frac{d\theta}{dt}$ 得

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}.$$

在开始发射时,距离是与时俱增的,所以

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}}.$$

与(9)联立,消去 dt 得

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r^2}{c_1}\sqrt{c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}}.$$

换变数 $r=\frac{1}{u}$, 则

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{u^2c_1}\sqrt{c_2+2fMu-c_1^2u^2},$$

即

$$d\theta=\frac{-c_1du}{\sqrt{c_2+2fMu-c_1^2u^2}}=\frac{-du}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2-\left(u-\frac{fM}{c_1^2}\right)^2}}.$$

解得

$$\theta=\cos^{-1}\left\{\left(u-\frac{fM}{c_1^2}\right)\Big/\left[\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}+c,$$

也就是

$$\frac{1}{r}=u=\frac{fM}{c_1^2}+\left[\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2\right]^{1/2}\cos(\theta-c). \tag{11}$$

注意，当

$$\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2<0 \tag{12}$$

时，(11)式无意义。

命

$$p=\frac{c_1^2}{fM}\quad(\text{参数}), \tag{13}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{c_2c_1^2}{(fM)^2}}\quad(\text{离心率}), \tag{14}$$

得出軌道方程

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)}. \tag{15}$$

这里有三个常数 c_1, c_2, c，可由开始发射时的情况决定：当 $t=0$ 时，假定发射点是地面，即

$$x=0,\quad y=R\quad(\text{地球半径}),$$

也就是 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $r=R$. 再由初速得

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\qquad \frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha.$$

由(7)及(8)給出 c_1, c_2 的数値:

$$\left.\begin{aligned}c_1&=-Rv_0\cos\alpha,\\ c_2&=v_0^2-\frac{2fM}{R}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

再由(15)得出

$$R=\frac{p}{1+e\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\right)}=\frac{p}{1+e\sin c},$$

解答

$$\sin c=\frac{\left(\frac{p}{R}-1\right)}{e}. \tag{17}$$

由(14),(16)得

$$\begin{aligned}e^2&=1+\left(v_0^2-\frac{2fM}{R}\right)R^2v_0^2\frac{\cos^2\alpha}{(fM)^2}\\ &=\left(1-\frac{Rv_0^2\cos^2\alpha}{fM}\right)^2+\frac{R^2v_0^4\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{(fM)^2}\\ &=\left(1-\frac{p}{R}\right)^2+\frac{p^2}{R^2}\text{tg}^2\alpha\geqslant\left(\frac{p}{R}-1\right)^2.\end{aligned} \tag{18}$$

因此(17)中的 c 是一定存在的。

§5. 軌道討論——第一、第二宇宙速度

再进一步研究軌道(4.15)的性質. 特别应当注意的是 $e=0$ 及 $e=1$ 这两个数値.

首先,当 $e=0$ 时,由(4.18)可以看到

$$\frac{p}{R}=1, \quad \operatorname{tg}\alpha=0,$$

卽可以得出 $\alpha=0$, $p=R$. 由(4.16)第一式及(4.13)得

$$v_0^2=\frac{fM}{R}. \tag{1}$$

把地球半径 R 及質量 M 的数值代入,卽得

$$v_0^2=\frac{6.685\times10^{-23}\times5.98\times10^{27}}{6370}[\text{公里/秒}]^2=62.76[\text{公里/秒}]^2,$$

所以

$$v_0=7.9\ \text{公里/秒}.$$

这是第一宇宙速度.

再当 $e=1$ 时,可以算出

$$v_0^2=\frac{2fM}{R}. \tag{2}$$

所求出的 v_0 是第一宇宙速度的 $\sqrt{2}$ 倍,卽得

$$v_0=11.2\ \text{公里/秒}.$$

这是第二宇宙速度.

当 $e<1$ 时,卽始速小于第二宇宙速度时,軌道(4.15)是一橢圓. 这是一个經过 P 点的橢圓,在 P 点的切綫斜率是 $\operatorname{tg}\alpha$. 如果軌道上有一点与地球中心的距离小于 R, 則物体便落在地球上而不能完成橢圓軌道,也就是函数

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)}$$

的最小数应当是 R (因为开始时是 $r=R$). 易見这一函数的最小值等于 $\frac{p}{1+e}$,因此

$$\frac{p}{1+e}=R, \quad e=\frac{p}{R}-1.$$

由(4.18)可知,这仅当 $\alpha=0$, 換言之,仅当沿地平方向发射才有可能.

另一方面,又由 $e\geqslant0$ 可知 $p\geqslant R$, 卽

$$R\leqslant\frac{c_1^2}{fM}\leqslant\frac{R^2v_0^2}{fM},$$

卽

$$v_0\geqslant\left(\frac{fM}{R}\right)^{1/2}\ (\text{第一宇宙速度}).$$

这就說明了,当初速度在第一、第二宇宙速度之間,沿地平方向发射,我們才可以获得橢圓軌道.

在实际进行的时候，我們并不用在地面上沿水平方向发射的方法，而是用先垂直向上然后傾斜进入軌道的方法，其原因是空气阻力大，不但要消耗大量能量，而且时間长了还可能使火箭因摩擦生热而烧毁. 所以需要尽快地离开大气层. 而垂直向上飞行时，在大气层中停留的时間最短. 不但这样，发射方向即使稍許偏离了水平方向，也不致于卫星落地. 当然，速度可能比第一宇宙速度要稍許大一些.

習題 1. 在离地 200 公里处依水面方向前进的物体，需要怎样的速度才能不落回地面？才能形成圓形軌道(即 $e=0$)? 若把形成圓形軌道的速度命之为 v_0，依此 v_0 但角度偏离水平，在怎样的限度内，才不致于落回地球?

前已講过軌道的最低点为 $R=\frac{p}{1+e}$，而最高点与球心的距离是 $\frac{p}{1-e}$.

再研究速度 v，由(4.8)得

$$v^2-\frac{2fM}{r}=c_2=v_0^2-\frac{2fM}{R}\quad(r>R).$$

由此可見，速度是不均匀的，因为由

$$v^2=\frac{2fM}{r}+v_0^2-\frac{2fM}{R},\qquad R\leqslant r\leqslant\frac{p}{1-e}$$

可知

$$v_0^2-\frac{4fMe}{p}\leqslant v^2\leqslant v_0^2.$$

由于

$$v_0^2-\frac{4fMe}{p}=v_0^2-4fM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{p}\right)=v_0^2+\frac{4f^2M^2}{R^2v_0^2}-\frac{4fM}{R}=\left(v_0-\frac{2fM}{Rv_0}\right)^2,$$

因此

$$\frac{2fM}{Rv_0}-v_0\leqslant v\leqslant v_0.$$

这再次說明了，初速度应当在第一、第二宇宙速度之間，同时也說明了最低点速度最快，最高点最慢. 軌道上每一点的速度不比初速快.

如果 v_0 大于第二宇宙速度，即 $e>1$，軌道方程是一股双曲綫

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)},$$

假定 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$.

我們現在証明，随时間增大，r 永远增大，而且趋向于∞.

在开始发射时，r 显然是一个时間的增函数. 如果它并不是永远增加的，則一定有一个值使 r 极大，即使 $1+e\cos(\theta-c)$ 极小. 这是一个連續函数，极小值是 $1-e<0$. 这是不可能的，所以这一物体一定沿軌道离地愈来愈远. 但并不是眞的飞向无穷，因为此时虽然地球不能自主，但太阳的引力可能使它不能远离.

这物体的速度平方

$$v^2=\frac{2fM}{r}+v_0^2-\frac{2fM}{R}>v_0^2-\frac{2fM}{R},$$

也就是速度永远大于$\sqrt{v_0^2-\frac{2fM}{R}}$，并且愈远愈接近于这个速度。

2. 讀者自己討論以下两种情况：

(i) 恰好是第二宇宙速度时，

(ii) 垂直发射时，即$\alpha=\frac{\pi}{2}$时。

3. 以上的研究，不仅对地球为然，概括起来，可以有以下的結論：

一个質量为M克的天体，在离中心R公里处发射一物体，对这个天体来說，第一宇宙速度等于$\sqrt{\frac{fM}{R}}$，第二宇宙速度等于$\sqrt{\frac{2fM}{R}}$。

例如，月球半径是1750公里，質量是7.25×10^{25}克，因此月球上造成卫星的速度是

$$\left(\frac{6.685\times10^{-23}\times7.25\times10^{25}}{1750}\right)^{\frac{1}{2}}=1.66,$$

冲出月球引力的速度等于$\sqrt{2}\times1.66=2.34$。

讀者試根据以下数据算出各行星上的第一、第二宇宙速度：

	質量（以地球为单位）	直径（以地球为单位）
水　　星	0.07	0.37
金　　星	0.81	0.97
地　　球	1.00	1.00
火　　星	0.11	0.52
木　　星	318	10.97
土　　星	95	9.4
天　王　星	15	3.8
海　王　星	17	3.4
冥　王　星	0.03?	0.46

§6. 第三宇宙速度

数据：

太阳質量：1.983×10^{33}克，

太阳和地球的距离：1.495×10^{8}公里，

地球繞太阳旋轉的速度：29.76公里/秒。

第一步．在离太阳1.495×10^{8}公里处发射物体，怎样的速度可以逃出太阳引力．由§5可知，速度的平方应当大于或等于

$$\frac{2f\times\text{太阳質量}}{1.495\times10^{8}}=\frac{2\times6.685\times10^{-23}\times1.983\times10^{33}}{1.495\times10^{8}}=1,773.43=(42.11)^2.$$

第二步．地球繞太阳的速度是29.76，所以如果地球上发射时的速率恆超过$42.11-29.76=12.35$公里/秒，就可以达到目的。

第三步，命 v_0 是从地球上发射的始速，则由 §5 知，这物体的速度

$$v^2 = \frac{2fM}{r} + v_0^2 - \frac{2fM}{R} > v_0^2 - \frac{2fM}{R} = v_0^2 - 125.5.$$

如果 v_0 取得使

$$v_0^2 - 125.5 \geqslant (12.35)^2,$$

即

$$v_0^2 \geqslant 278.1 = (16.7)^2,$$

即得所求. 如果取

$$v_0 \geqslant 16.7 \text{ 公里/秒},$$

就保証了脫离太阳的引力而一去不复返了. 这就是第三宇宙速度.

这就是說，当我們在地球上順着地球前进的方向发射（例如，在下弦的时候向月球方向射去），如果初速是 16.7 公里/秒，则在出地球引力范围的时候，它对地球的速度将大于 12.3 公里/秒，加之地球前进的速度 29.8 公里/秒，所以对太阳来說，这物体获得了 42.1 公里/秒的速度. 因而可能逸出太阳系.

必須注意，如果不依照順着地球軌道方向发射，情况就完全不同了.

这也同时說明了苏联发射宇宙火箭为什么取順着地球前进方向发射的道理，也說明了为什么成了“外”行星，而不是“內”行星.

習題. 讀者試根据下列数据算出行星上的第三宇宙速度，水，金，火，木，土，天王，海王，冥王諸星与太阳的距离各为 58，108，228，780，1430，2880，4500，5900 百万公里，它們繞太阳的平均速度是 47.83，34.99，24.11，13.05，9.64，6.36，5.43，4.73 公里/秒.

§7. 質点組——多体問題

在空間取定一个坐标系，有 n 个質点，它們的坐标是

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n). \end{array}\right\} \tag{1}$$

n 个質点間有內力，即其中任意二質点間的互相作用的力. 例如，第一質点对第二質点的作用力 $\mathbf{J}_{21}$ 与第二質点对第一質点的作用力 $\mathbf{J}_{12}$ 数值相等，但方向相反，加之第 i 質点所受的外力以 $\mathbf{F}_i$ 来代表，如此得出运动方程組

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \dfrac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{J}_{12} + \mathbf{J}_{13} + \cdots + \mathbf{J}_{1n}, \\ m_2 \dfrac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{J}_{21} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{J}_{23} + \cdots + \mathbf{J}_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n \dfrac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \mathbf{J}_{n1} + \mathbf{J}_{n2} + \mathbf{J}_{n3} + \cdots + \mathbf{J}_{nn-1} + \mathbf{F}_n. \end{array}\right\} \tag{2}$$

最有名的例子是天体力学上的 n 体問題. 假定有 n 个天体，質量各为 $m_1, \cdots, m_n$,

并不添加外力，求出仅靠万有引力而得出的軌道，即 $\mathbf{F}_i = 0$ 及

$$\mathbf{J}_{ij} = f\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^2}\left(\frac{x_i - x_j}{\rho_{ij}}, \frac{y_i - y_j}{\rho_{ij}}, \frac{z_i - z_j}{\rho_{ij}}\right), \tag{3}$$

这里 $\rho_{ij}^2 = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2$，即第 i 个天体与第 j 个天体的距离，f 是引力常数．方程組

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \\ &m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -f\sum_{j\neq i}\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad 1\leqslant i\leqslant n \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

称为 n 体天体方程，共有 $6n$ 个一次方程．求解 $6n$ 个以 t 为变数的函数 x_i，y_i，z_i，$\frac{dx_i}{dt}$，$\frac{dy_i}{dt}$，$\frac{dz_i}{dt}$．

$n = 2$ 时，基本上就是我們以上几节所討論过的問題；$n = 3$ 就是历史上沒有解决的有名的三体問題；$n > 3$ 更不必說了．

但我們还是可以給出以下 10 个积分：

1）重心积分．

将(4)总加起来，得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = 0. \tag{5}$$

积分得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i = t\mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{6}$$

分成支量写一共是 3 个方程．(6) 說明了这 n 个質点的重心依等速运动，共有 6 个常数 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，因此可以作为 6 个积分．

2）扫面积积分．

求方程(4)与 $\mathbf{r}_i$ 的矢量积，得

$$m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\times\mathbf{r}_i = -f\sum_{j\neq i}\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\times\mathbf{r}_i = -f\sum_{j\neq i}\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3}\mathbf{r}_i\times\mathbf{r}_i.$$

由于

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\times\mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_i\times\mathbf{r}_i),$$

所以

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{v}_i\times\mathbf{r}_i) = 0,$$

即得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{v}_i\times\mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\alpha}. \tag{7}$$

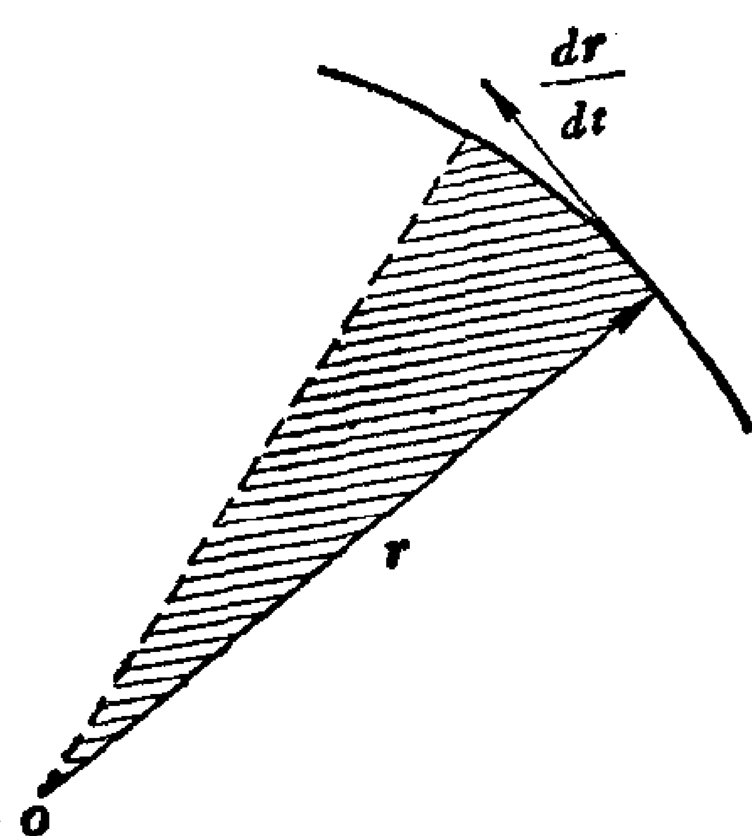


图 119

讀者試自己回答何謂扫面积积分．

3）能量积分．

命

$$U=f\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}},\tag{8}$$

則

$$\frac{\partial U}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(f\sum_{i<k}\frac{m_i m_k}{\rho_{ik}}+f\sum_{k<j}\frac{m_k m_j}{\rho_{kj}}\right)=-f\sum_{i\neq k}\frac{m_k m_j}{\rho_{kj}^3}(x_k-x_i).$$

因此(4)式可以改写成为

$$m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}=\left(\frac{\partial U}{\partial x_i},\ \frac{\partial U}{\partial y_i},\ \frac{\partial U}{\partial z_i}\right)\quad i=1,2,\cdots,n.\tag{9}$$

求此式与矢量 $\mathbf{v}_i$ 的内积,得

$$m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\cdot\mathbf{v}_i=\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right),$$

求和得

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i d(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}dz_i\right)=dU.$$

因此积分得

$$T-U=h,\tag{10}$$

这里 h 是常数, $-U$ 是位能,而

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i\tag{11}$$

是动能. (10)称为能量积分.

我們已經找出了 10 个已知积分,进一步的研究属于天体力学范围,我們不在这里討論了.

習题. 具体解出 $n=2$ 的情况,并且与 §§ 3—4 的結果相比較.

§ 8. Lagrange 綫性方程

在 §§ 8—11 中将討論一些一阶偏微分方程,这些偏微分方程的特点是它們的求解可归結为常微分方程組的求解問題.

先从一个最簡单的情况出发,假定

$$\varphi(u,v)=0,\tag{1}$$

其中 φ 是任意函数, 而 u, v 是 x, y, z 的函数. 我們来消去这任意函数 φ. 对 x, y 求微商,得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, 因此

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

整理一下得

$$Pp + Qq = R, \tag{3}$$

此处

$$\frac{P}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Q}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{R}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}, \tag{4}$$

或与之等价的形式

$$\left.\begin{aligned} P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在求解偏微分方程(3)的时候,我們主要的困难是找出 u, v 来.

我們現在考慮

$$u = a, \quad v = b, \tag{6}$$

这里 a, b 是常数,微分则得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0. \end{aligned}\right\}$$

因此

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}},$$

即

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{7}$$

这个常微分方程組以 $u = a$, $v = b$ 为解答,因此得出解題法則.

为了求偏微分方程

$$Pp + Qq = R \tag{3}$$

的解答,先写下常微分方程

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{7}$$

来,求出此常微分方程的两个函数无关的解答

$$u = a, \quad v = b, \tag{6}$$

则偏微分方程(3)有一解

$$\varphi(u, v) = 0, \tag{1}$$

这里φ是任意函数.

反过来看,如果偏微分方程有一解

$$z=f(x,y),$$

以此代入常微分方程的解答(6),则得

$$u=u(x,y,z)=u[x,y,f(x,y)]=u^*(x,y)=u^*,$$
$$v=v(x,y,z)=v[x,y,f(x,y)]=v^*(x,y)=v^*.$$

由此

$$\frac{\partial u^*}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial v^*}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\frac{\partial u^*}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial v^*}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}.$$

由此 u^*, v^* 对 x, y 的 Jacobian 是

$$J=\frac{\partial u^*}{\partial x}\frac{\partial v^*}{\partial y}-\frac{\partial u^*}{\partial y}\frac{\partial v^*}{\partial x}=$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=$$
$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}+p\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}+q\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}. \tag{8}$$

另一方面,(6)是(7)的解,因此

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0,$$

也就是

$$\frac{\partial u}{\partial x}P+\frac{\partial u}{\partial y}Q+\frac{\partial u}{\partial z}R=0.$$

同法得

$$\frac{\partial v}{\partial x}P+\frac{\partial v}{\partial y}Q+\frac{\partial v}{\partial z}R=0.$$

因此

$$\frac{P}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Q}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{R}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=M, \tag{9}$$

这里M是公比. 代入(8)可知,

$$J=\frac{1}{M}(R-Pp-Qq). \tag{10}$$

由于 $R-Pp-Qq=0$, 因此,如果 $M\neq 0$, 则可知

$$J=0,$$

也就是 u^*, v^* 是函数相关的，也就是有一函数 φ 使

$$\varphi(u^*, v^*) = 0,$$

也就是把偏微分方程的解代入

$$\varphi(u, v)$$

时，它变为零，即在

$$\varphi(u, v) = 0$$

中包含了解 $z = f(x, y)$.

因此，以上所提出的解题法则并不一定得出所有的解来，还有那些使

$$M = M(x, y, z) = M(x, y, f(x, y)) = 0$$

的 $z = f(x, y)$ 可能是例外. 但由 $M = 0$ 得出来的解是不含有任意函数的，因此含有任意函数的解一定可以由以上的解题法则推算出来.

但請注意，偏微分方程还可能包有一些特解——并不包有任意函数的解.

例 1. 解方程

$$xp + yq = z.$$

由

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

解得 $z = ay$, $z = bx$, 因此得

$$\varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{z}{x}\right) = 0.$$

例 2. 解方程

$$(mz - ny)p + (nx - lz)q = ly - mx.$$

由

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$$

得出

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = a$$

及

$$ldx + mdy + ndz = 0,$$

亦即

$$lx + my + nz = b.$$

因而得

$$lx + my + nz = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$$

例 3. 解方程

$$[1 + (z - x - y)^{1/2}]p + q = 2.$$

由

$$\frac{dx}{1 + (z - x - y)^{1/2}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

可得

$$2y - z = a, \quad y + 2(z - x - y)^{1/2} = b.$$

但特解

$$z = x + y$$

却不能表成为

$$\varphi(2y - z,\quad y + 2(z - x - y)^{1/2}) = 0$$

的形式。要証明这点，以 $z = x + y$ 代入 u, v 得

$$u = 2y - z = y - x,$$
$$v = y + 2(z - x - y)^{1/2} = y,$$

因此 u, v 是不相关的函数.

这个解是从

$$M = \frac{Q}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}} = (z - x - y)^{1/2} = 0$$

得来的.

例 4. 求方程

$$2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} + 5 = 0$$

的解之經过直綫

$$x = a_1 v,\quad y = a_2 v,\quad z = a_3 v$$

者，这里 a_1, a_2, a_3 是常数，而 $3a_1 - 2a_2 \neq 0$.

先由

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{-5}$$

得解

$$u = 3x - 2y,\quad v = 5x + 2z.$$

因而得一般解

$$5x + 2z = \varphi(3x - 2y),$$

这里 φ 是任意函数. 以直綫代入，得

$$(5a_1 + 2a_3)v = \varphi[(3a_1 - 2a_2)v],$$

所以

$$\varphi(t) = \frac{5a_1 + 2a_3}{3a_1 - 2a_2} t.$$

因而得出所求的解答

$$(3a_1 - 2a_2)(5x + 2z) = (5a_1 + 2a_3)(3x - 2y).$$

例 5. 求

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$$

的解答之适合于

$$z(1, y) = \varphi(y)$$

者.

先解

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{ydz}{x^3},$$

由前二項得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+a,$$

又由一,三項得

$$dz=\frac{x}{y}dx=x\left(\frac{1}{x}-a\right)dx=(1-ax)dx,$$

卽得

$$z=x-\frac{1}{2}ax^2+b=\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{2y}+b.$$

因而得一般解

$$z-\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{2y}=\chi\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right),$$

这里 χ 是任意函数. 利用 $z(1, y)=\varphi(y)$, 定出

$$\varphi(y)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\chi\left(1-\frac{1}{y}\right),$$

算得

$$\chi(t)=\varphi\left(\frac{1}{1-t}\right)-1+\frac{1}{2}t.$$

因而解答

$$z=\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{2y}-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+\varphi\left(\frac{xy}{xy-y+x}\right)=$$

$$=(x-1)\left(1+\frac{(x+1)(x-y)}{2xy}\right)+\varphi\left(\frac{xy}{xy-y+x}\right).$$

§9. 綫性方程的一般解

以上的解題法則可以推广成为 n 个变数的情形. 求

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=Z \tag{1}$$

的一般解,可以先解

$$\frac{dx_1}{X_1}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{Z}. \tag{2}$$

命其 n 个函数无关的解是

$$\varphi_1(z, x_1, \cdots, x_n)=c_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(z, x_1, \cdots, x_n)=c_n,$$

这里 $c_1, \cdots, c_n$ 是常数,则偏微分方程(1)的通解是

$$\Phi(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)=0,$$

这里Φ是任意函数。

例 1. 求解

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=mz,$$

这里m是常数。先解

$$\frac{dx_1}{x_1}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{dz}{mz},$$

得出

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},\ \frac{z}{x_n^m}=c_n.$$

因此

$$\frac{z}{x_n^m}=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

这里Φ是一任意函数,卽得

$$z=x_n^m\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

这是齐次函数的 Euler 定理的逆定理。

如果方程(1)中$Z=0$,則方程組显然有一积分

$$z=c\ (\text{常数}).$$

命$u_1,\cdots,u_{n-1}$是

$$\frac{dx_1}{X_1}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$$

的$n-1$个积分,則方程(1)的解是

$$z=\Phi(u_1,\cdots,u_{n-1}),$$

这里Φ是一任意函数。

§ 10. 一般一級偏微分方程的解法——Charpit 法

我們現在考虑一般的一級偏微分方程

$$F(x,y,z,p,q)=0. \tag{1}$$

如果(1)的解答还适合于另一个一級偏微分方程

$$\Phi(x,y,z,p,q)=0, \tag{2}$$

則可由(1)与(2)解出

$$p=\psi(x,y,z),\qquad q=\chi(x,y,z).$$

但Φ不能是任意的,它必須使

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{3}$$

如果这条件适合了,則我們可由解

$$dz=pdx+qdy \tag{4}$$

来找出方程(1)的解。因而解方程(1)的問題一变而为寻求适合于条件(3)的函数Φ的

問題.

对 x, y 求偏微商,得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}p+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}q+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0.$$

从前一对方程中消去 $\frac{\partial p}{\partial x}$, 得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+ + \frac{\partial q}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)=0.$$

从后一对方程中消去 $\frac{\partial q}{\partial y}$, 得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+ + \frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)=0.$$

由于 $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$, 上两式相加后,这两項消去整理之得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\left(-\frac{\partial F}{\partial p}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x}+ + \left(-\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\left(-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0. \tag{5}$$

(5)是一个函数 Φ 的綫性方程,因而由上节的結果可知, 問題化为求解下列綫性方程組的問題了.

$$\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dz}{-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dx}{-\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{d\Phi}{0}.$$

这説明了 $d\Phi=0$, 即 Φ 是常数. 这是(5)式的显然解答,不必多論.

将这方程的解答与(1)联立, 作为 x, y 的函数解出 p, q, 然后积分 (4) 得出解答来, 即为所求.

例 1. 解微分方程

$$p^2+q^2-2px-2qy+2xy=0,$$

其对应的常微分方程組是

$$\frac{dp}{2y-2p}=\frac{dq}{2x-2q}=\frac{dx}{-2p+2x}=\frac{dy}{-2q+2y},$$

故

$$dp+dq=dx+dy,$$

卽得

$$p-x+q-y=a.$$

与原方程

$$(p-x)^2+(q-y)^2=(x-y)^2$$

联立,解答

$$2(p-x)=a+[2(x-y)^2-a^2]^{1/2},$$
$$2(q-y)=a-[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}.$$

因此, $dz=pdx+qdy$ 变为

$$2dz=(2x+a)dx+(2y+a)dy+(dx-dy)[2(x-y)^2-a^2]^{1/2},$$

卽得

$$2z-b=x^2+ax+y^2+ay+\frac{x-y}{2}[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}-$$
$$-\frac{a^2}{2^{3/2}}\log(2^{1/2}(x-y)+[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}).$$

这是一个完全解,不难推导出一般解来. 但注意,并无奇异解.

習題. 求解

i) $$p^2+q^2-2px-2qy+1=0,$$

ii) $$2(pq+py+qx)+x^2+y^2=0.$$

§ 11. 上节方法的特例

1) Lagrange 方程

$$R-Pp-Qq=0,$$

此时由

$$F=R-Pp-Qq$$

得

$$-\frac{\partial F}{\partial p}=P,\qquad -\frac{\partial F}{\partial q}=Q,$$

$$-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}=pP+qQ=R.$$

因此得綫性方程組

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},$$

卽为前所談过的方程.

2) 解方程

$$\psi(p,q)=0,$$

此时

$$F=\psi(p, q),$$

其中 x, y, z 都不出现,故

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

所以

$$\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dx}{-\frac{\partial \psi}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial \psi}{\partial q}},$$

故得 $p=a$, $q=b$ 都是常数. 由原方程可知

$$\psi(a, b)=0,$$

因此

$$dz=pdx+qdy=adx+bdy.$$

因而

$$z=ax+by+c, \quad \psi(a, b)=0.$$

3) 解方程

$$\psi(z, p, q)=0,$$

其中 x, y 不出現. 命 $F=\psi(z, p, q)$, 則

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

因此

$$\frac{dp}{p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dq}{q\frac{\partial F}{\partial z}},$$

故得 $q=ap$. 与 $\psi(z, p, q)=0$ 联立,我們可以解出 p 与 q 来,即 $p=f(z)$ 与 $q=af(z)$. 代入

$$dz=pdx+qdy,$$

得

$$\frac{dz}{f(z)}=dx+ady.$$

因此

$$\int\frac{dz}{f(z)}+c=x+ay.$$

4) 解

$$F=\varphi(x, p)-\psi(y, q)=0,$$

則

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial p}=\frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial q}=-\frac{\partial \psi}{\partial q}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

故

$$\frac{dp}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}=\frac{dx}{-\frac{\partial \varphi}{\partial p}}$$

或

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx=0,$$

即

$$\varphi(x,p)=a,$$

故

$$\psi(y,q)=a.$$

解出 p 与 q 得

$$p=\theta_1(x,a),\quad q=\theta_2(y,a).$$

因此

$$dz=\theta_1(x,a)dx+\theta_2(y,a)dy,$$

而

$$z+c=\int\theta_1(x,a)dx+\int\theta_2(y,a)dy.$$

例 1. 求偏微分方程

$$p^2+q^2=1$$

的解之过圆周 $x^2+y^2=1$，$z=0$ 者.

由 2) 已知，这方程有一完全解

$$z=ax+by+c,\quad a^2+b^2=1.$$

命 $a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$，$c=c(\theta)$，求其一般解

$$z=x\cos\theta+y\sin\theta+c(\theta),$$
$$0=-x\sin\theta+y\cos\theta+c'(\theta).$$

当 $z=0$ 时，

$$1=x^2+y^2=(x\cos\theta+y\sin\theta)^2+(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2=$$
$$=(c(\theta))^2+(c'(\theta))^2.$$

这个微分方程的一般解是 $c(\theta)=\cos(\theta+k)$，k 是常数，而奇异解是 $c(\theta)=\pm1$. 由奇异解得

$$(z\pm1)^2=x^2+y^2.$$

从一般解

$$z^2=(x+\cos k)^2+(y-\sin k)^2,$$

这并非所求之解，当 $z=0$ 时得出一点 $x=-\cos k$，$y=\sin k$，而不是整个圆周 $x^2+y^2=1$，$z=0$.

索 引 一

一 画

二 画

三 画

四 画

五 画

六 画

七　画

八　画

九　画

十　画

十一画

十二画

索 引 二

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等数学引论　　第一卷　　第二分册
作者＝华罗庚
页数＝３３７
ＳＳ号＝１０１７９８０４
出版日期＝１９６３年１１月第１版